Snorkraft og bølgefart

- fra borgeleo.dk

Mange har lavet eksperimenter for at eftervise formlen for bølgefarten for tværbølger på en snor, nemlig

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad \textbf{Bølgefart på snor}$$

Her er v bølgens fart, F er snorens opspændingskraft (snorkraften), og μ er snorens masse pr. længdeenhed.

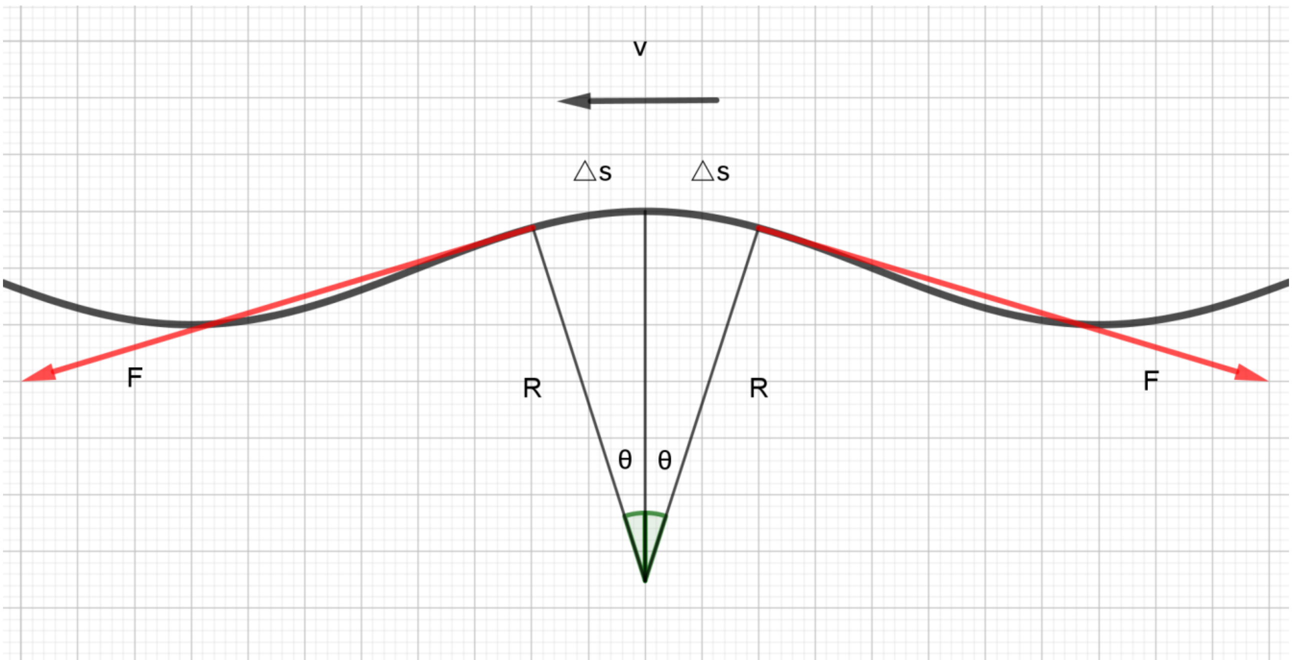
Men hvordan kan man argumentere for denne formel?

En løbende (sinus-)bølge på en snor/tråd kan beskrives ved formlen

$$y(x,t) = A \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{x - v \cdot t}{\lambda}\right)\right]$$

Her er $y(x,t)$ udsvinget fra ligevægt til tiden t på stedet x langs snoren. A er bølgens amplitude. Desuden er λ bølgens bølgelængde, og endelig er v bølgens fart.

Vi forestiller os, at vi følger med en bølgetop af denne bølge mod højre (stigende x-værdier), så vi hele tiden har toppen 'i synsfeltet', se figur 1. Herved passerer snoren hele tiden gennem bølgetoppen i retningen mod venstre, se hastighedspilen på figur 1.



Figur 1: Kræfterne (de røde pile) på en lille del af snoren med længden 2Δs følger tangenterne til snoren

På figuren ovenfor ses de to kræfter hver med betegnelsen F, der påvirker det lille stykke af snoren med længden $2\Delta s$. Kræfterne følger snorens retning i punktet (tangenten). Størrelsen R er snorens krumningsradius i toppunktet. Der gælder derfor (for små vinkler θ):

$$\Delta s = R \cdot \theta$$

Massen af det lille snorstykke med længden $2\Delta s$ er

$$\Delta m = \mu \cdot 2\Delta s$$

hvor μ er massen pr. længdeenhed for snoren. Kombinerer vi disse to ligninger, bliver

$$\Delta m = \mu \cdot 2 \cdot R \cdot \theta$$

De to kræfter med betegnelsen F danner vinklen θ med vandret, derfor er de to lodrette komposanter af kræfterne i alt

$$F_{res} = 2 \cdot F \cdot \sin(\theta) \approx 2 \cdot F \cdot \theta$$

De to vandrette komposanter ophæver hinanden. Det sidste lighedstegn gælder kun for små vinkler θ, hvor vinklen θ er regnet i radianer.

På figur 1 passerer 'snor-atomerne' med bølgefarten v gennem toppunktet mod venstre, idet vi som nævnt følger bølgens top i dens bevægelse mod højre. Herved deltager det lille udsnit af snoren med længden $2\Delta s$ i toppunktet i en (næsten) jævn cirkelbevægelse nær toppunktet, og vi kan derfor bruge følgende formel i toppunktet:

$$a = \frac{v^2}{R} \qquad \text{centripetalacceleration}$$

(accelerationsvektoren i enhver bevægelse kan - til hvert tidspunkt - deles op i en centripetalacceleration vinkelret på bevægelsen af størrelsen ovenfor - og en tangentialacceleration parallelt med bevægelsen. Centripetalaccelerationen er ansvarlig for at banen krummer, hvorimod tangentialaccelerationen er ansvarlig for, at farten er stigende eller faldende - afhængig af retningen af denne acceleration. I vores tilfælde er der ingen tangentialacceleration i toppunktet)

Nu kan vi opstille bevægelsesligningen ved hjælp af Newtons 2. lov:

$$F_{res} = \Delta m \cdot a$$

Eller - når vi benytter de ovenstående udtryk (for små vinkler θ):

$$2 \cdot F \cdot \theta = \mu \cdot 2 \cdot R \cdot \theta \cdot \frac{v^2}{R}$$

Af denne ligning findes nemt

$$F = \mu \cdot v^2$$

Endelig finder vi heraf formlen for bølgefarten på snoren:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad \textbf{Bølgefart på snor}$$

Bølgefarten på snoren er altså kvadratroden af forholdet mellem snorens opspændingskraft F og snorens masse pr længdeenhed μ.