Dagens og nattens længde - modelberegninger

- *fra www.borgeleo.dk*

Vi vil i det følgende se på hvordan vi kan beregne dagens (og nattens) længde på forskellige steder Jorden og på forskellige tidspunkter af året.

Beregningerne tager i første omgang ikke hensyn til at solens stråler afbøjes i Jordens atmosfære, sådan at Solen kan ses i en kort periode også efter at den faktisk er gået ned under horisonten og en kort periode inden den passerer op over horisonten. Ligeledes tages der ikke hensyn til solskivens endelige udstrækning, der er omkring $0{,}5°$. Derfor vil dagens reelle længde være lidt større end formlerne (1) og (2) nedenfor forudsiger.

Efter denne simple geometriske model udvides modellen for at tage hensyn til både bøjningen i Jordens atmosfære og solskivens endelige udstrækning samt Solens årlige 'uregelmæssige' bevægelse i ekliptikas plan. Gode modeller for Solens deklination på årets dage og den såkaldte tidsekvation præsenteres. Herved forbedres modellen så meget, at det er muligt at forudberegne Solens opgangs- og nedgangstider med god præcision.

Geometrisk formel for dagens længde

For at kunne lave disse beregninger, må vi have præciseret nogle begreber, se figur 1 nedenfor.

a) Timevinkel t: den vinkel, observatøren er drejet bort fra den retning, hvor solen kulminerede - målt i forhold til Ækvatorplanet, se figur 1.
b) Solens deklinationsvinkel δ: solhøjden over ækvatorplanet. Varierer i årets løb mellem værdierne $-23{,}45°$ og $23{,}45°$ fra vintersolhverv til sommersolhverv.
c) Observatørens breddegrad b: vinklen mellem retningen OQ og ækvatorplanet

Hvordan beregner vi nu timevinklerne t, svarende til solopgang og solnedgang?

Vi bruger følgende formel til beregning af t:

(1) $$\cos(t) = -\tan(\delta) \cdot \tan(b)$$ timevinkel t for solopgang/solnedgang

Efter beregningen af timevinklen t i grader kan daglængden beregnes (med $t = \mathrm{Arccos}(-\tan(\delta) \cdot \tan(b))$):

(2) $$dagslængde = L_d = \frac{2 \cdot t}{15°/\mathrm{h}}$$

da Jorden drejer $360°/24h = 15\,°/\mathrm{h}$, altså $15°$ pr. time.

Eksempel: den korteste dag Skagen Fyr

Skagen Fyr har den geografiske bredde $b = 57{,}749°$ N, og Solens deklination er på den korteste dag $\delta = -23{,}45°$. Altså er

$$\cos(t) = -\tan(\delta) \cdot \tan(b) = -\tan(-23{,}45°) \cdot \tan(57{,}749°) = 0{,}6875$$

hvoraf

$$t = 46{,}57°$$

Og dagens længde bliver

$$L_d = \frac{2 \cdot t}{15°/\mathrm{h}} = 6{,}21\ \mathrm{h} = 6\ \mathrm{h}\ 13\ \mathrm{min}$$

Almanakken siger $6\ \mathrm{h}\ 31\ \mathrm{min}$, altså en afvigelse på 18 min.

$$nattelængde = 24\ \mathrm{h} - 6{,}2\ \mathrm{h} = 17{,}8\ \mathrm{h}$$

Opgave 1: Gedser Odde – Danmarks sydligste punkt. Geografisk bredde: $54{,}56°\ \mathrm{N}$

Beregn længden af den korteste dag på Gedser Odde. Hvor stor er forskellen i forhold til Skagen fyr?

Opgave 2: Beregn længden af den korteste dag på det sted, du befinder dig. Find stedets geografiske bredde fx ved at benytte Google Earth.

Opgave 3: Beregn dagslængden på årets længste dag (sommersolhverv) ved polarcirklen med den geografiske bredde 66,55° N. Beregn også dagslængden på den korteste dag ved samme breddegrad.

Opgave 4: Sammenlign dine resultater med almanakken, fx via linket i slutningen af denne artikel. Hvad kan forklaringen på afvigelserne være?

Begrundelse af formel for solopgang/solnedgang

Men hvad er begrundelsen for formel (1)?

Vi opskriver koordinaterne for $\overrightarrow{OQ}$, hvor Q er iagttagerens position:

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} \cos(t) \cdot \cos(b) \\ \sin(t) \cdot \cos(b) \\ \sin(b) \end{pmatrix}$$

og retningsvektoren $\vec{r}$ for solstrålerne (retning mod Solens centrum):

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos(\delta) \\ 0 \\ \sin(\delta) \end{pmatrix}$$

Kommentar til koordinaterne for $\overrightarrow{OQ}$: punktet med koordinaterne $(\cos(t)\,, \sin(t)\,, 0)$ ligger på en enheds-storcirkel i (x, y)-planet med centrum i $(0{,}0{,}0)$. Når koordinaterne ganges med $\cos(b)$ vil punktet ligge på en cirkel med radius $\cos(b)$. 'Løftes' dette punkt til højden $\sin(b)$, vil punktet ligge på en lillecirkel parallel med (x, y)-planet på enhedskuglen med centrum i $(0{,}0{,}0)$.

Solstrålernes retning $\vec{r}$ er ortogonal på $\overrightarrow{OQ}$, når solstrålerne 'strejfer' jordoverfladen:

$$\vec{r} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0 \qquad \text{solstrålerne 'strejfer' jordkuglen}$$

Hvoraf

$$\cos(\delta) \cdot \cos(t) \cdot \cos(b) + 0 \cdot \cos(t) \cdot \cos(b) + \sin(\delta) \cdot \sin(b) = 0$$

som kan omskrives til

$$\cos(\delta) \cdot \cos(t) \cdot \cos(b) + \sin(\delta) \cdot \sin(b) = 0$$

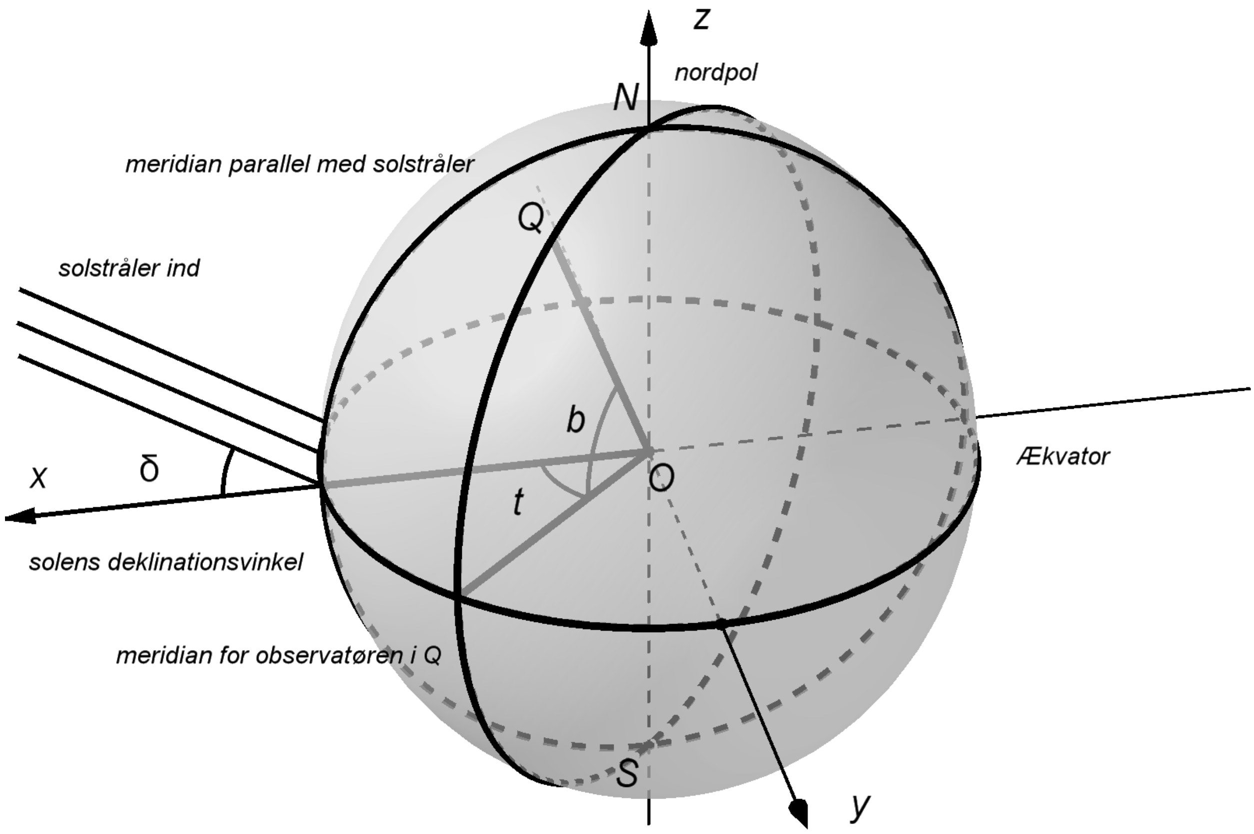
Ligningen deles igennem med $\cos(\delta) \cdot \cos(b)$:

$$\cos(t) + \frac{\sin(\delta)}{\cos(\delta)} \cdot \frac{\sin(b)}{\cos(b)} = 0$$

Eller

$$\cos(t) = -\tan(\delta) \cdot \tan(b)$$

Som påstået i formel (1).



Figur 1: Betydning af observatørens timevinkel t og geografisk bredde b samt Solens deklinationen δ

Forenklet model for Solens deklination

Men hvordan afhænger Solens deklination af tidspunktet af året? Det er ikke helt simpelt, da Solen ikke bevæger sig jævnt i sin bane om Jorden – eller snarere omvendt!

Men her antager vi i første omgang en simpel model hvor deklinationen er en cosinusfunktion som funktion af tidspunktet på året med max og min på hhv. $23{,}45°$ og $-23{,}45°$ ved sommersolhverv og vintersolhverv.

Modellen er

(3) $\delta = 23{,}45° \cdot \cos(\frac{360°}{365 \text{ døgn}}[T - 172 \text{ døgn}])$ forenklet model, Solens deklination

hvor T er døgnantallet på året. Når $T = 172$ døgn, er det sommersolhverv (21. juni).

Med denne model kan vi også beregne, hvor hurtigt dagens længde vokser – pr. døgn.

Døgnets længde – tilvækst pr. døgn

Vi vil her approksimere denne tilvækst (differens) med den afledede dL_d/dT og benytte modellerne (1), (2) og (3) til beregningerne.

Vi differentierer på følgende måde:

(4) $\frac{dL_d}{dT} = \frac{2}{15°/\text{h}} \cdot \frac{dt}{dT} = \frac{2}{15°/\text{h}} \cdot \frac{dt}{d\delta} \cdot \frac{d\delta}{dT}$ - idet vi antager, at bredden b er uændret

Fra formel (1) finder vi

$$-\sin(t) \cdot \frac{dt}{d\delta} = -\tan(b) \cdot \frac{1}{\cos^2 \delta}$$

hvoraf

$$\frac{dt}{d\delta} = \frac{\tan(b)}{\cos^2 \delta \cdot \sin(t)}$$

Af modellen (3) finder vi

$$\frac{d\delta}{dT} = 23{,}45° \cdot (-\sin\left(\frac{360°}{365 \text{ døgn}}[T - 172 \text{ døgn}]\right)) \cdot \frac{2\pi}{365 \text{ døgn}}$$

Indsættes disse resultater i formel (4), får vi

$$\frac{dL_d}{dT} = \frac{2}{15°/\text{h}} \cdot \frac{dt}{d\delta} \cdot \frac{d\delta}{dT} = \frac{2}{15°/\text{h}} \cdot \frac{\tan(b)}{\cos^2 \delta \cdot \sin(t)} \cdot 23{,}45° \cdot (-\sin\left(\frac{360°}{365 \text{ døgn}}[T - 172 \text{ døgn}]\right)) \cdot \frac{2\pi}{365 \text{ døgn}}$$

eller reduceret

$$\frac{dL_d}{dT} = -0{,}0538 \frac{\text{h}}{\text{døgn}} \cdot \frac{\tan(b)}{\cos^2 \delta \cdot \sin(t)} \cdot \sin\left(\frac{360°}{365 \text{ døgn}}[T - 172 \text{ døgn}]\right)$$

Endelig benytter vi, at $1 \text{ h} = 60 \text{ min}$, og får

(5) $\frac{dL_d}{dT} = -3{,}23 \frac{\text{min}}{\text{døgn}} \cdot \frac{\tan(b)}{\cos^2 \delta \cdot \sin(t)} \cdot \sin\left(\frac{360°}{365 \text{ døgn}}[T - 172 \text{ døgn}]\right)$ dagslængdevækst

Eksempel: dagslængde og dagsvækst Slagelse

Slagelse på bredden $b = 55{,}40°$ N (Sct Mikkels kirke) på datoen 1. marts.

$$T = 31 + 28 + 1 = 60 \text{ døgn}$$

$$\delta = 23{,}45° \cdot \cos\left(\frac{360°}{365 \text{ døgn}}[60 \text{ døgn} - 172 \text{ døgn}]\right) = -8{,}20°$$

$$t = \arccos(-\tan(55{,}40°) \cdot \tan(-8{,}20°)) = 77{,}94°$$

$L_d = \frac{2 \cdot t}{15°/\text{h}} = 10{,}39\text{ h}$ almanak: $10{,}73\text{ h}$ afvigelse: $0{,}34\text{ h} = 20\text{ min}$

$$\frac{dL_d}{dT} = -3{,}23\ \frac{\text{min}}{\text{døgn}} \cdot \frac{\tan(55{,}40°)}{\cos^2(-8{,}20°) \cdot \sin(77{,}94°)} \cdot \sin\left(\frac{360°}{365\text{ døgn}}[60\text{ døgn} - 172\text{ døgn}]\right)$$

$$= 4{,}58\text{ min/døgn}$$

Forårsjævndøgn 21 marts:

$$T = 31 + 28 + 21 = 80\text{ døgn}$$

$\delta = 23{,}45° \cdot \cos\left(\frac{360°}{365\text{ døgn}}[80\text{ døgn} - 172\text{ døgn}]\right) = -\ 0{,}30°$ (tæt på 0°)

$t = \arccos(-\tan(55{,}40°) \cdot \tan(-0{,}30°)) = 90{,}4°$ (tæt på 90°)

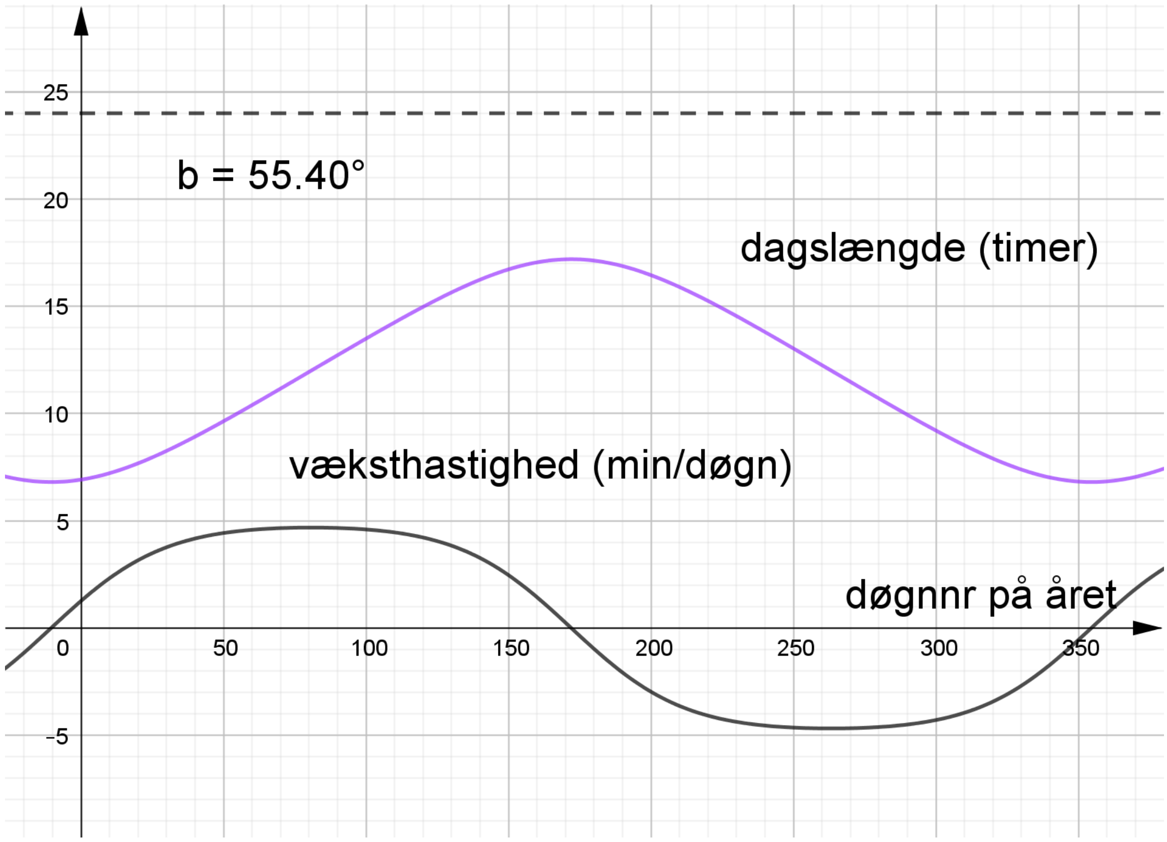
$L_d = \frac{2 \cdot t}{15°/\text{h}} = 12{,}06\text{ h}$ (tæt på 12 h)

$$\frac{dL_d}{dT} = -3{,}23\ \frac{\text{min}}{\text{døgn}} \cdot \frac{\tan(55{,}40°)}{\cos^2(-0{,}30°) \cdot \sin(90{,}4°)} \cdot \sin\left(\frac{360°}{365\text{ døgn}}[80\text{ døgn} - 172\text{ døgn}]\right)$$

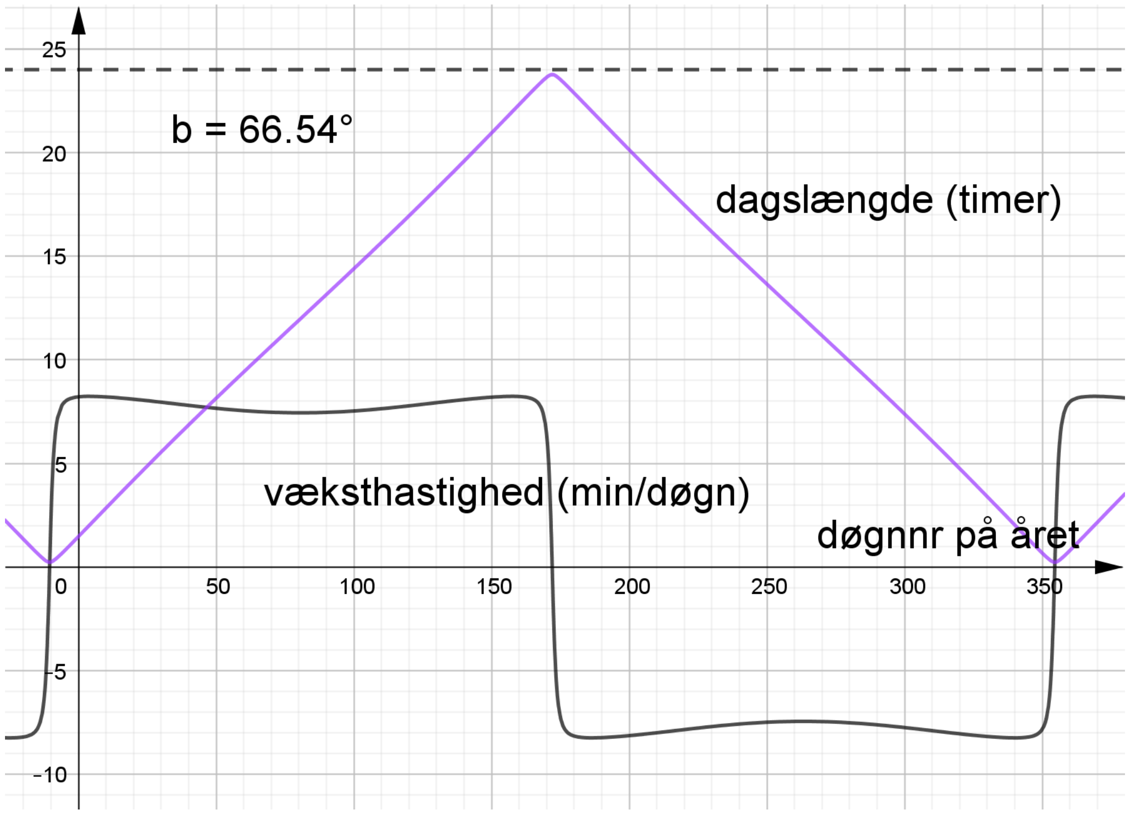
$$= 4{,}68\text{ min/døgn}$$

Opgave 5: Beregn væksthastigheden for dagslængden ved forårsjævndøgn d. 21. marts for Skagen Fyr. Tjek resultatet ved at se på dagslængden for dagene omkring d. 21. marts.

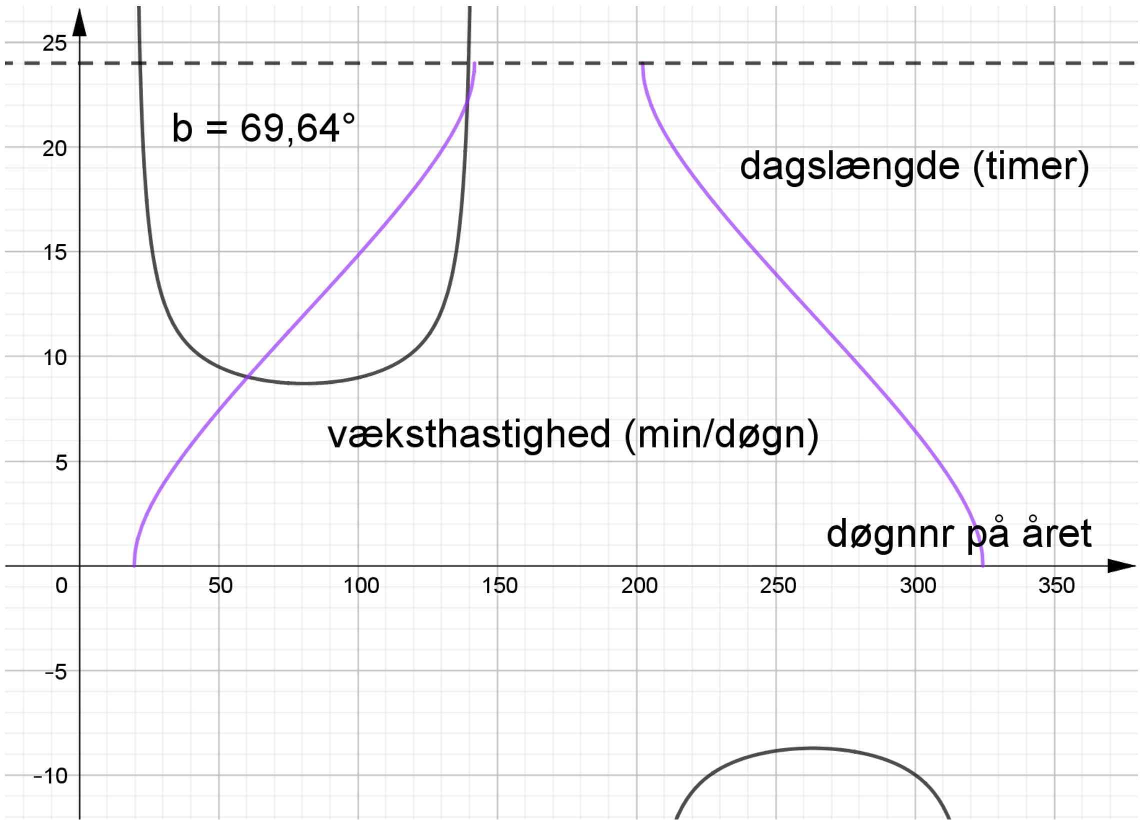
Vi vil her se på den årlige variation i dagslængde og væksthastighed vha. formlerne (2), (3) og (5) på 3 forskellige breddegrader, nemlig $b = 55{,}40°$ N (Sct. Mikkels kirke i Slagelse), $b = 66{,}54°$ N (tæt på men syd for polarcirklen) og $b = 69{,}64°$ N (Tromsø Domkirke) nord for polarcirklen.



Figur 2: b=55,40° N (Sct. Mikkels kirke i Slagelse)



Figur 3: b=66,54° N (lidt syd for polarcirklen)



Figur 4: b=69,64° N (Tromsø Domkirke) nord for polarcirklen med en periode med 24 h's sollys sommer og en tilsvarende periode med mørke vinter

Men hvor stor er indflydelsen på dagens længde fra Jordens 'skæve' bane om Solen – alias Solens ujævne bevægelse om Jorden?

Formlen (3) er jo en simplificeret model af Solens deklination. Skal vi nøjere vurdere hvad denne indflydelse er, må vi have en bedre model for Solens deklination. Denne model er fx Fourier-rækken

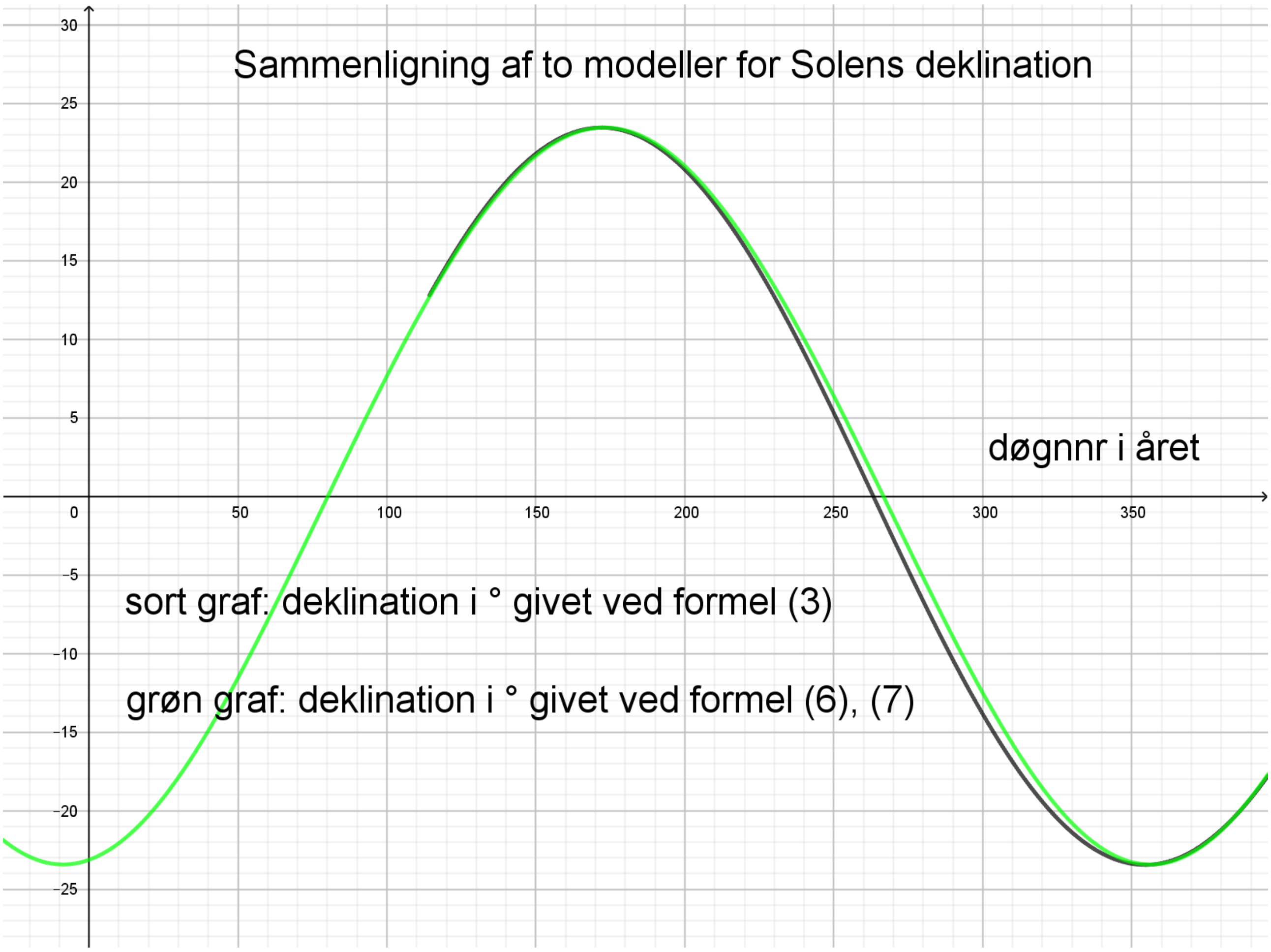
(6) $$\delta(x) = 0{,}006918 - 0{,}399912 \cdot \cos(x) + 0{,}070257 \cdot \sin(x) - 0{,}006758 \cdot \cos(2x) + 0{,}000907 \cdot \sin(2x) - 0{,}002697 \cdot \cos(3x) + 0{,}001480 \cdot \sin(3x)$$

hvor

(7) $$x = \frac{2\pi}{365 \text{ døgn}} (T - 1 \text{ døgn})$$

se ref. 2 og 3.

Formel (6) giver en fejl på deklinationen på maksimalt $3'$.



Figur 5: To modeller for Solens deklination

Som det ses af graferne på fig. 5, er der god overensstemmelse mellem de to modeller for deklinationen, dog er der en synlig afvigelse op til 2° i perioden fra dag 200 til dag 350, hvor den grønne model givet ved (6) og (7) klart er den bedste.

Vi kan nu igen bestemme dagens længde på forskellige tidspunkter af året ved hjælp af formel (1) og (2), men hvor deklinationen er givet ved formlerne (6) og (7).

Vi vil også se på hvilke ændringer der sker med væksten i dagens længde når vi skifter model for deklinationen.

Udtrykket (4) kan genbruges: $\frac{dL_d}{dT} = \frac{2}{15°/\mathrm{h}} \cdot \frac{dt}{dT} \cdot \frac{180°}{\pi} = \frac{24\mathrm{h}}{\pi} \cdot \frac{dt}{d\delta} \cdot \frac{d\delta}{dT} = \frac{24 \cdot 60\ \mathrm{min}}{\pi} \cdot \frac{dt}{d\delta} \cdot \frac{d\delta}{dT}$

idet t og δ regnes i radianer.

Her kan vi også genbruge sammenhængen $\frac{dt}{d\delta} = \frac{\tan(b)}{\cos^2\delta \cdot \sin(t)}$.

Udtrykket for $\frac{d\delta}{dT}$ må ændres på følgende måde:

$$\frac{d\delta}{dT} = \frac{d\delta}{dx} \cdot \frac{dx}{dT}$$

Her bliver

(8) $$\frac{d\delta}{dx} = 0{,}399912 \cdot \sin(x) + 0{,}070257 \cdot \cos(x) + 0{,}006758 \cdot \sin(2x) \cdot 2 + 0{,}000907 \cdot \cos(2x) \cdot 2 + 0{,}002697 \cdot \sin(3x) \cdot 3 + 0{,}001480 \cdot \cos(3x) \cdot 3$$

og

$$\frac{dx}{dT} = \frac{2\pi}{365\ \mathrm{døgn}}$$

Alt i alt finder vi så

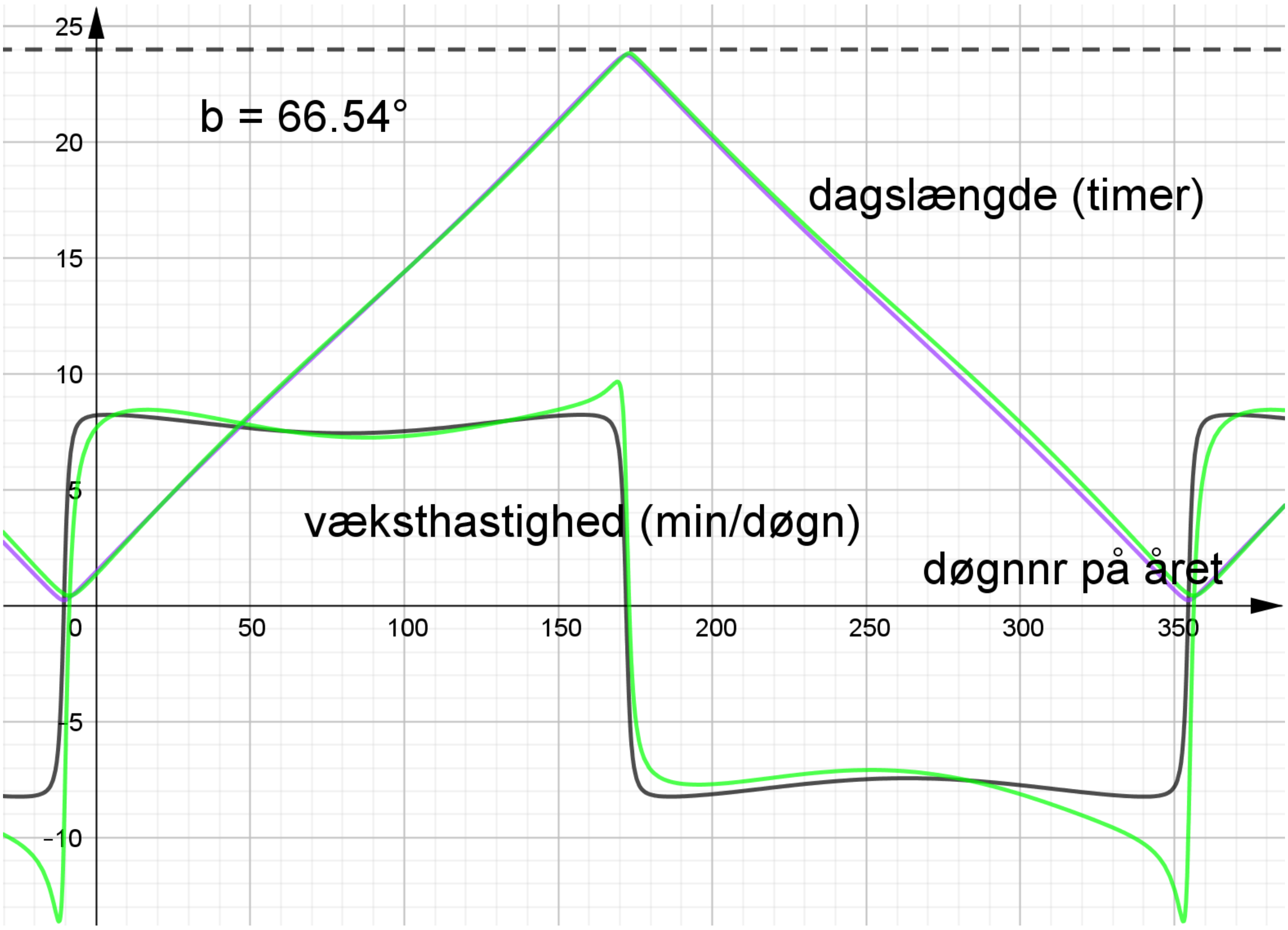
$$\frac{dL_d}{dT} = \frac{24 \cdot 60\ \mathrm{min}}{\pi} \cdot \frac{dt}{d\delta} \cdot \frac{d\delta}{dT} = \frac{24 \cdot 60\ \mathrm{min}}{\pi} \cdot \frac{\tan(b)}{\cos^2\delta \cdot \sin(t)} \cdot \frac{d\delta}{dx} \cdot \frac{2\pi}{365\ \mathrm{døgn}}$$

Eller reduceret

$$\frac{dL_d}{dT} = 7{,}89\ \mathrm{min}/\mathrm{døgn} \cdot \frac{\tan(b)}{\cos^2\delta \cdot \sin(t)} \cdot \frac{d\delta}{dx}$$

hvor x i (8) og (6) er givet ved (7).

Herefter kan vi tegne graferne for dagslængden og væksten i dagslængden – sammen med graferne for den simplere model for deklinationen.



De grønne grafer for dagslængden og væksthastigheden er tegnet med den bedre model for deklinationen givet ved (6) og (7) – og giver som det ses ikke de helt store forandringer i dagslængden.

Dagens længde og tusmørkeperioder - definitioner

Men hvordan defineres dagslængden i det hele taget? Her kommer ref. 4 os til hjælp med en oversigt over forskellige definitioner – gengivet i tabel 1.

Tabel 1:
Dagens længde - defineret ved morgen/aften-positionen af Solens centrum i forhold til horisonten

Vinklen p er den vinkel, Solens centrum er under horisonten

	Dagslængde, definitioner (med eller uden tusmørke)	$p(°)$
1	Solopgang eller solnedgang sker, når lys fra centret af solskiven strejfer horisonten – uden brydning	0
2	Solopgang eller solnedgang sker, når lys fra toppen af solskiven strejfer horisonten – uden brydning	0,26667

3	Solopgang eller solnedgang sker, når lys fra toppen af solskiven synes at strejfe horisonten (officiel def. i USA)	0,8333 *
4	Borgerligt tusmørke	6,0
5	Nautisk tusmørke	12,0
6	Astronomisk tusmørke	18,0

*: denne værdi er summen af solskivens radius (i grader set fra Jorden) og den vedtagne værdi for brydningen af lyset i atmosfæren på $34'$ (astronomisk almanak 1992)

Som det ses har vi indtil videre alene brugt definition 1, som også er den mest enkle.

Men er det muligt at beregne dagens længde med de andre definitioner? Og hvad er den officielle dagslængde, der normalt bruges? Det er jo ikke den første, da den giver en kortere dagslængde end almanakken.

Vi vil her benytte definition 3 på dagens længde, hvor også lysets brydning tages med i beregningen.

Ændring af solopgangs/solnedgangs-formlen

Vi må så ændre formel (1), da solskivens centrum ikke længere er i horisonten, men knap en grad under horisonten når Solens overkant forsvinder under/dukker op over horisonten.

Retningen mod Solens centrum er defineret ved vektoren (se fig. 1)

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos(\delta) \\ 0 \\ \sin(\delta) \end{pmatrix}$$

For observatøren i punktet Q er zenit defineret ved retningen

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} \cos(t)\cdot\cos(b) \\ \sin(t)\cdot\cos(b) \\ \sin(b) \end{pmatrix}$$

Begge vektorer er enhedsvektorer.

Vinklen mellem zenit og retningen til solcentrum er $90° - h$, hvor h er solhøjden over horisonten. Derfor bliver (pr definition af skalarproduktet)

$$\vec{r}\cdot\overrightarrow{OQ} = |\vec{r}|\cdot\left|\overrightarrow{OQ}\right|\cdot\cos(90° - h) = 1\cdot 1\cdot\cos(90° - h) = \sin(h)$$

hvor vi også har benyttet identiteten $\cos(90° - h) = \sin(h)$.

Indsætter vi koordinaterne i skalarproduktet, får vi ligningen

$$\cos(\delta)\cdot\cos(t)\cdot\cos(b) + \sin(\delta)\cdot\sin(b) = \sin(h)$$

Vi isolerer af denne ligning $\cos(\delta)$:

(9) $$\cos(t) = \frac{\sin(h) - \sin(\delta)\cdot\sin(b)}{\cos(\delta)\cdot\cos(b)}$$

Denne ligning bruges til beregning af timevinklen t, hvorefter dagslængden L_d igen kan beregnes af formel (2).

Vi tager et eksempel, vi før har regnet på, nemlig

Eksempel: Skagen Fyr

Skagen Fyr har den geografiske bredde $b = 57{,}749°\ \mathrm{N}$, og Solens deklination er på den korteste dag $\delta = -23{,}45°$, samt solhøjden $h = -0{,}8333°$, se tabel 1.

Altså er ifølge (9)

$$\cos(t) = \frac{\sin(-0{,}8333°) - \sin(-23{,}45°) \cdot \sin(57{,}749°)}{\cos(-23{,}45°) \cdot \cos(57{,}749°)} = 0{,}6578$$

hvoraf

$$t = 48{,}87°$$

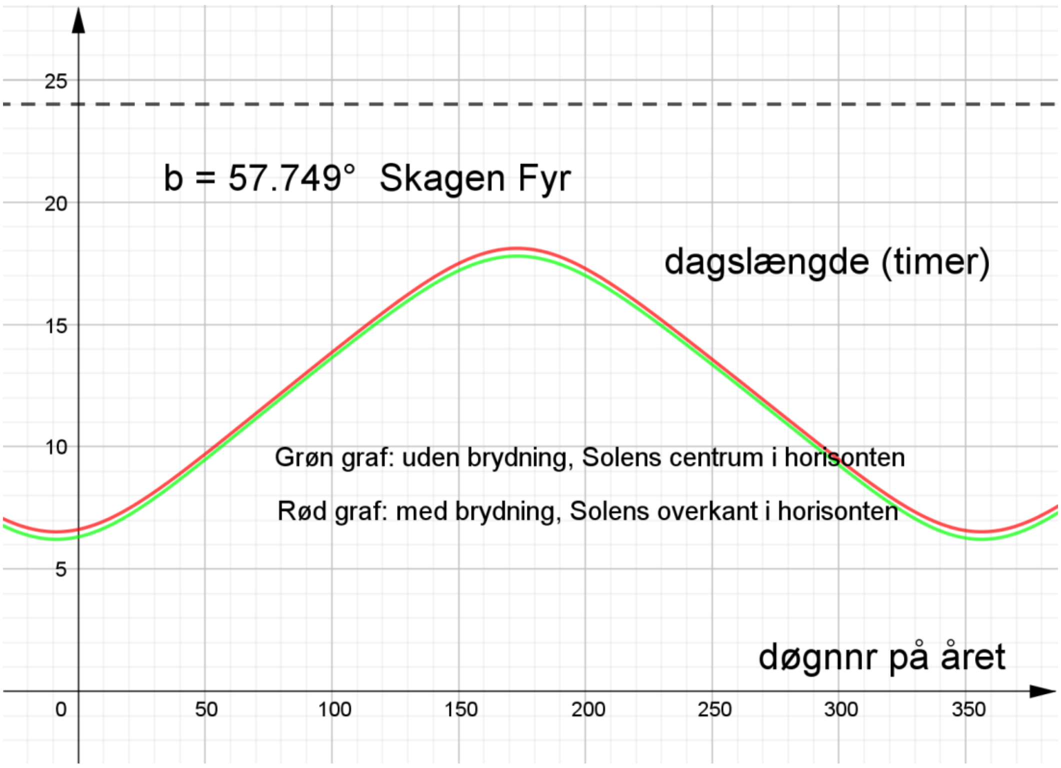
Og dagens længde bliver

$$L_d = \frac{2 \cdot t}{15°/\mathrm{h}} = 6{,}52\ \mathrm{h} = 6\ \mathrm{h}\ 31\ \mathrm{min}$$

Almanakken siger for dagens længde også $6\ \mathrm{h}\ 31\ \mathrm{min}$.

Vi vil nu tegne grafer over dagens længde gennem hele året med den nye formel (9) og sammenligne med modellen, der i tabellen er benævnt nr. 1 – også givet ved formel (1).

Den model, vi vælger for deklinationen for begge dagslængde-modeller, er givet ved formlerne (6) og (7)



Figur 6: To forskellige definitioner af dagens længde

Det ses – næppe overraskende – at dagslængden øges når brydning i atmosfæren medtages, og Solen 'skubbes' lige ned under horisonten som definition af begyndelse og slut på dagen. Forskellen er størst omkring sommersolhverv og vintersolhverv.

Og det giver en langt bedre overensstemmelse med almanakken, som eksemplet ovenfor viser.

Opgave 6: Gedser Odde – Danmarks sydligste punkt. Geografisk bredde: $54{,}56°$ N

Beregn en forbedret værdi af længden af den korteste dag på Gedser Odde. Hvor stor er forskellen i forhold til Skagen fyr?

Bestemmelse af Solens opgangs- og nedgangstider

Efter at have bestemt dagens længde i en ret præcis model, kunne vi fortsætte med at stille spørgsmålet: kan vi så også beregne Solens opgangs- og nedgangstider – givet længde- og breddegrad, og dagsnummeret på året. Svaret er ja. Hertil kræves dog, at vi kan beregne det, der hedder sand soltid på den pågældende dag. De timevinkler, vi har beregnet tidligere, er målt på det tidspunkt, hvor Solen kulminerer på den pågældende dag og sted. Kan vi beregne tidspunktet for denne kulmination og dagens længde, er det nemt at beregne op- og nedgangstiderne for Solen som kulminationstidspunktet plus/minus den halve dagslængde.

For at kunne bestemme tidspunktet for Solens kulmination, skal vi bl.a. bruge den såkaldte tidsekvation, der er forskellen på sand soltid og middelsoltid. Denne forskel kan i det væsentlige forstås som en sum af to bidrag, nemlig et som skyldes jordaksens hældning i forhold til ekliptikas plan og et anden der skyldes jordbanens excentricitet. Tidsekvationen viser, hvor meget den sande sol er foran/bagefter middelsolen.

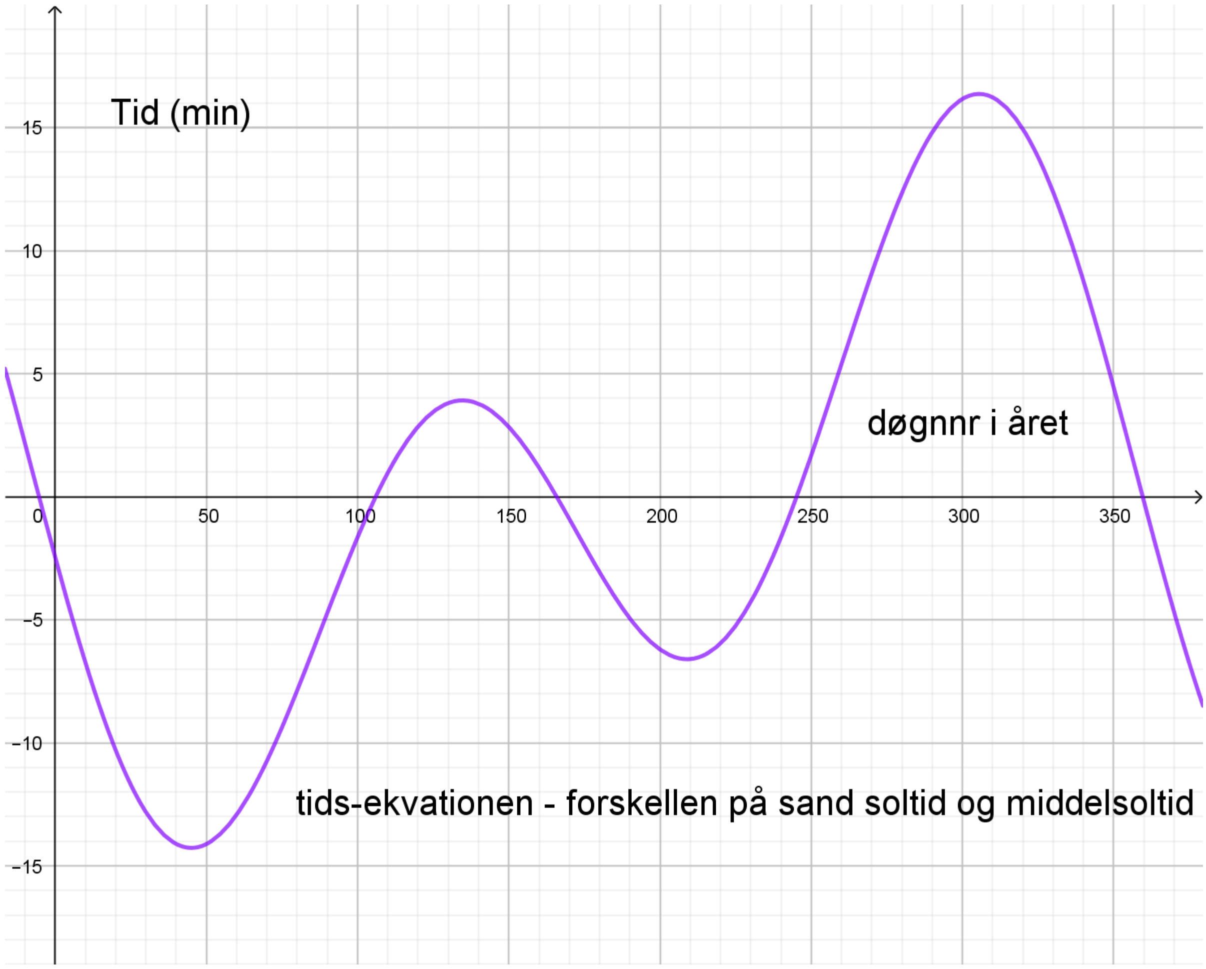
Vi benytter her følgende model (Fourier-række) for tidsekvationen (se ref. 3):

(10) $$T_{eq}(x) = 0{,}0000075 + 0.001868 \cdot \cos(x) - 0{,}032077 \cdot \sin(x) - 0{,}014615 \cdot \cos(2x) - 0{,}040849 \cdot \sin(2x)$$

hvor x kan udtrykkes ved døgnnummeret på året T (samme som (7)):

$$x = \frac{2\pi}{365 \text{ døgn}} (T - 1 \text{ døgn})$$

Tidsekvationen (10) er målt i radianer – altså den vinkel, den sande sol er foran/bagefter middelsolen, og kan nemt omregnes til minutter, da Jorden drejer en grad på 4 minutter (15° pr time). Grafen for T_{eq} ses nedenfor.



Figur 7: Tidsekvationen - forskellen på sand soltid og middel-soltid

Maksimum-fejlen ved brug af denne række er 0,0025 radianer, svarende til ca. 35 sekunder i tid.

Ud over tidsekvationen på en given dag skal vi bruge observatørens længdegrad for at finde placeringen i tidszonen. Denne placering vil tillade os at beregne hvor meget den sande sols kulmination er foran/bagefter kulminationstidspunktet på den nærmeste tidsmeridian (fx 15° øst for Greenwich med tiden GMT + 1 h). Forskellen på længdegraden af observatøren og på længdegraden af den lokale tidsmeridian omregnes til minutter, idet 1° svarer til 4 minutter. Er vi øst for tidsmeridianen, er denne tid positiv (vi er foran meridianen i lokaltid) og er vi vest for tidsmeridianen, er tiden negativ.

Summen af tidsekvationen på dagen og tidszone-bidraget som omtalt ovenfor fortæller os hvor meget den sande sol er foran/bagefter middelsolen.

Vi ser på et eksempel, se næste side.

Eksempel: Solens opgang- og nedgangstider – på et givet sted og en given dag på året

Vi vil beregne Solens opgangs- og nedgangstider d. 20. januar på stedet med bredden $55° \, 50' \, 36''\mathrm{N}$ $(55{,}8434° \, \mathrm{N})$ og længden $12° \, 3' \, 27'' \, Ø$ $(12{,}0575° \, Ø)$ i Frederikssund. Tidszonen i Danmark er GMT + 1 h. Tidsmeridianen svarende til denne lokale middelsoltid er $15° \, Ø$, en meridian der fx går gennem Bornholm, lidt øst for på Gudhjem. I Frederikssund er vi derfor vest for denne meridian, og den lokale middelsoltid er derfor mindre end GMT + 1 h. Hvor meget?

Forskellen på længderne i Frederikssund og $15° \, Ø$ meridianen er

$$længdeforskel: \qquad 12{,}0575° - 15° = -2{,}9425°$$

$$tidsforskel: \qquad (-2{,}9425°) \cdot 4 \frac{\mathrm{min}}{°} = -11{,}770 \ \mathrm{min}$$

Den lokale middelsoltid i Frederikssund er derfor ca. 12 minutter mindre end hvad uret viser (hvis det viser GMT + 1 h).

Tidsekvationen på dag 20 i året er (se formel (10))

$$tidsekvation(20) = -10{,}3093 \ \mathrm{min}$$

Den lokale soltid er derfor

$$lokal\ soltid = GMT + 1 \ \mathrm{h} + (-11{,}770 \ \mathrm{min}) + (-10{,}3093 \ \mathrm{min}) = GMT + 1 \ \mathrm{h} - 22{,}0793 \ \mathrm{min}$$

Hvis derfor vores ur viser tiden $12 \ \mathrm{h} \ 22{,}08 \ \mathrm{min}$ vil den lokale soltid være $12 \ \mathrm{h} \ 00 \ \mathrm{min}$ – på dette tidspunkt kulminerer Solen altså.

Dagslængden kan vi finde ved de metoder, der er omtalt ovenfor.

Resultatet er

$$dagslængde = 7{,}8440 \ \mathrm{h} = 7\mathrm{h} \ 50 \ \mathrm{min} \ 38 \ \mathrm{sek} = 2 \cdot (3 \ \mathrm{h} \ 55 \ \mathrm{min} \ 19 \ \mathrm{sek})$$

hvor vi har anvendt dagslængdemodellen med deklinationsmodellen (6) og (7) og dagslængdedefinitionen 3 i tabel 1.

Nu er vi i stand til at beregne Solens opgangs- og nedgangstider:

Solen står op kl: $\qquad 12 \ \mathrm{h} \ 22 \ \mathrm{min} - 3 \ \mathrm{h} \ 55 \ \mathrm{min} = 8 \ \mathrm{h} \ 27 \ \mathrm{min}$

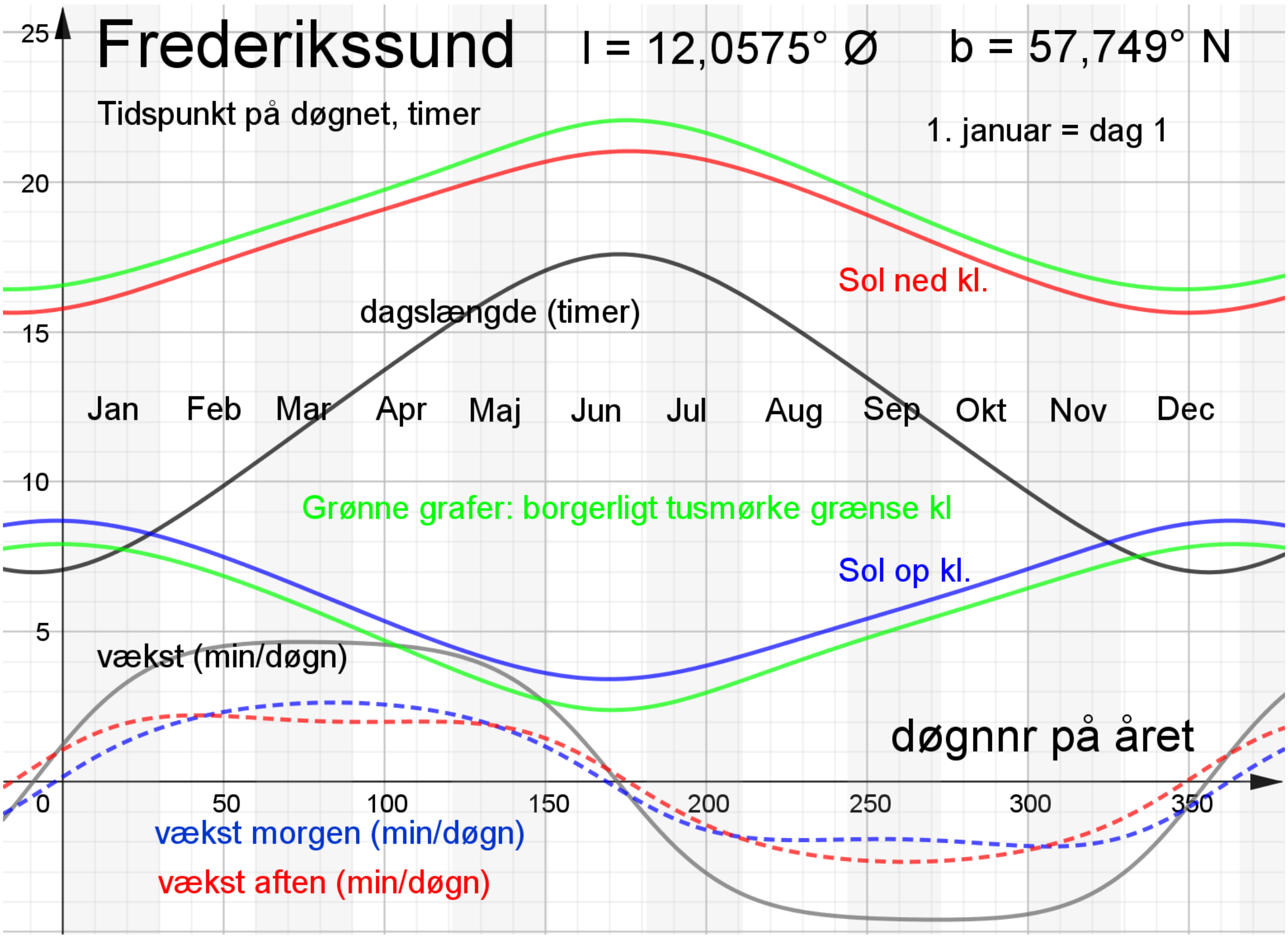
Solen går ned kl: $\qquad 12 \ \mathrm{h} \ 22 \ \mathrm{min} + 3 \ \mathrm{h} \ 55 \ \mathrm{min} = 16 \ \mathrm{h} \ 17 \ \mathrm{min}$

Almanakken: Solen står op kl. 8 h 28 min, og går ned kl. 16 h 17 min (http://www.solartopo.com/daylength.htm)

Mit gps-ur giver præcis de beregnede tidspunkter.

Overensstemmelsen med andre kilder er således god!

Opgave 7: Beregn Solens opgangs- og nedgangstidspunkt i dag på det sted, du befinder dig lige nu! Find evt. længde- og breddegrader via en gps, eller appen Stellarium – eller programmet Google Earth. Regn med 28 dage i februar måned. Hvor godt stemmer dine resultater med andre kilder?



Figur 8: Sol op- og nedgangstider, dagslængde og væksthastigheder for dagslængde, Frederikssund

Dagslængde-væksten er defineret som forskellen på dagslængden dag nr. $T+1$ og dagslængden dag nr. T.

Almanak – se fx: http://www.suninfo.dk/ , http://www.solartopo.com/daylength.htm eller almanakken fra Københavns Universitet.

Referencer:

1) https://www.bristol.ac.uk/media-library/sites/engineering/engineering-mathematics/documents/modelling/teacher/daylength_t.pdf besøgt d. 2. januar 2022
2) http://naturalfrequency.com/Tregenza_Sharples/Daylight_Algorithms/algorithm_1_11.htm
3) https://www.mail-archive.com/sundial@uni-koeln.de/msg01050.html
4) https://citeseerx.ist.psu.edu › *viewdoc › download*