Elementer af Milne-modellen for Universet

Af Børge L. Nielsen *- fra www.borgeleo.dk*

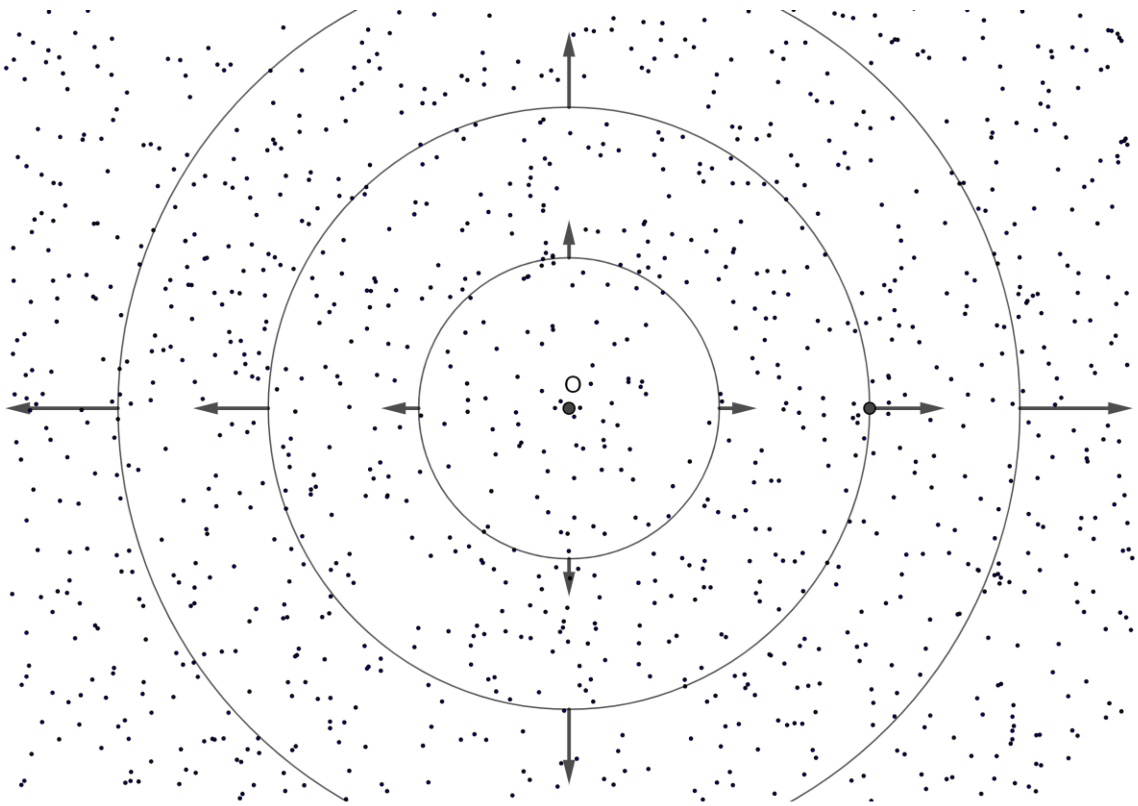
Milnemodellen er opstillet af Edward Arthur Milne i 1935. Modellen opfylder i GR-koordinater (se nedenfor) kravene til homogenitet og isotropi - det kosmologiske princip.

Milnemodellen svarer ikke til det Univers, vi lever i. I Milnemodellen er der nemlig ingen gravitationskræfter der kan ændre på galaksernes bevægelse.

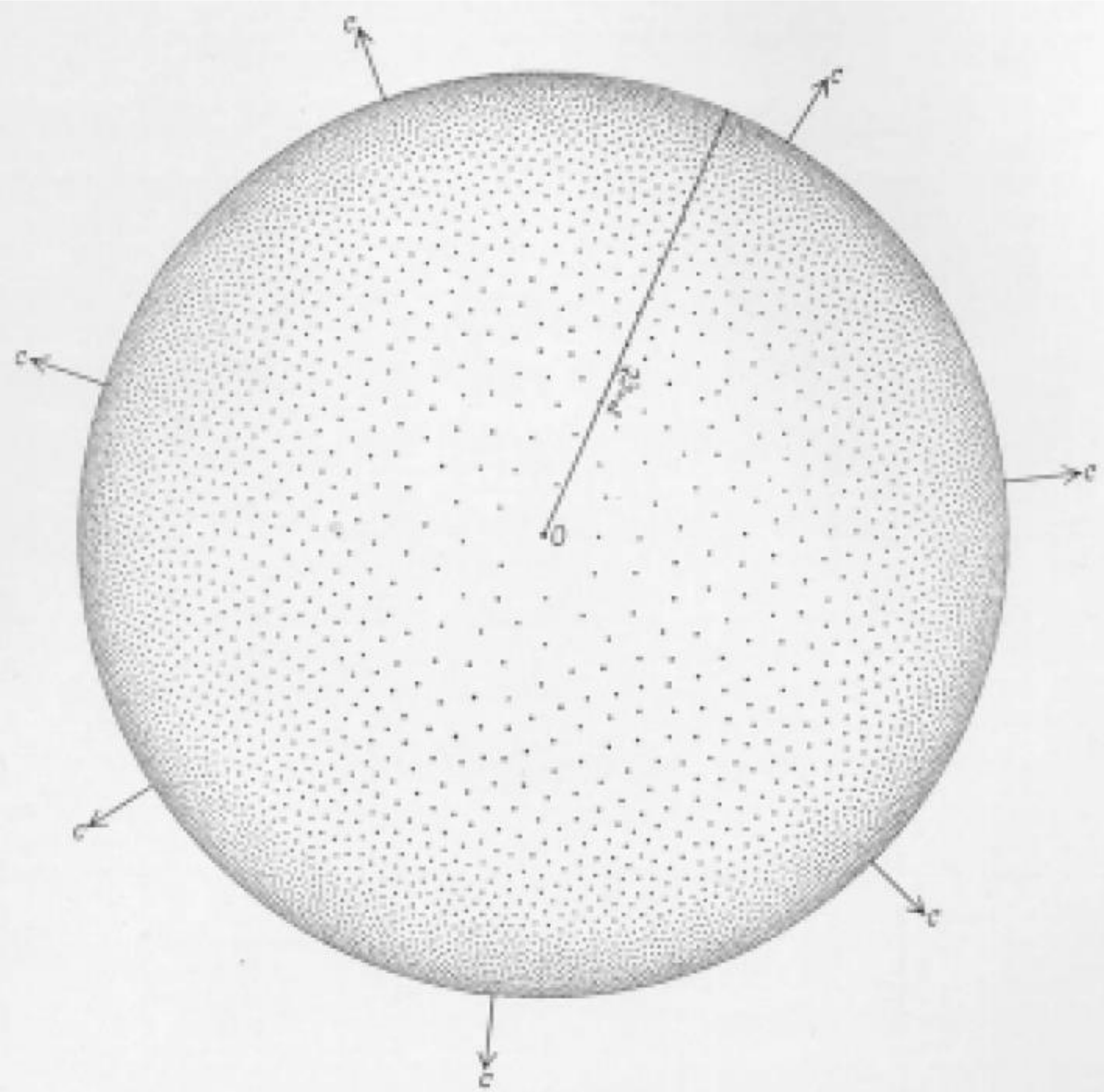
Så hvorfor beskæftige sig med denne model?

Netop fordi der ingen gravitationskræfter er, er det i denne model muligt at beskrive hele Universet på to måder:

1) Ved en GR (general relativitet) model hvor afstandene i Universet er egen-afstande, dvs. at afstanden mellem to galakser A og B er summen af lokalt definerede egenafstande/hvileafstande mellem de galakser, der befinder sig mellem A og B og som følger Hubbleflowet. Tiden er egentiden for den enkelte galakse, der følger Hubbleflowet.
   I dette system er Hubbles lov gældende, jf. figuren nedenfor.
2) Ved er SR (speciel relativitet) model, hvor hele Universet er dækket af et enkelt Lorentz-system. I modellen er Universet endeligt, begrænset af afstanden $x = c \cdot t$ hvor t er universets alder.



Figur 1: Milnemodellen i GR-koordinater. Universet er uendeligt, 'galakse'tætheden er konstant i rummet, og Hubbles lov gælder



Figur 2: Milnemodellen i SR-koordinater. Universet er endeligt, begrænset af radius x = c·t, hvor t er Universets alder og c er lysets fart. Tætheden af 'galakserne' er tiltagende mod randen af Universet. Figuren er lånt fra ref. 1.

Ved at transformere mellem de to systemer, er det fx muligt at vise, at selv galakser med meget høj rødforskydning *z* (fx $z = 10$) ikke bevæger sig hurtigere end lyset. I SR-systemet er lysets fart præcis c og kan ikke overskrides af materielle legemer.

Desuden kan vi vise, at selv store rødforskydninger kan opfattes som en serie af små Doppler-forskydninger, eller for være mere præcis: de store rødforskydninger opstår ved en løbende Doppler-forskydning af det lys, der på sin vej passerer fra en galakse og bevæger sig videre mod en anden nærliggende galakse der også følger Hubbleflowet og derfor er på vej væk fra den første – med en lille rødforskydning til følge. Denne proces sker hele tiden på lysets lange vej mod vore teleskoper.

Dette er ikke specielt for Milne-modellen: selv om vi ikke kan ’dække’ hele Universet med et enkelt Lorentz-system når der skal tages hensyn til gravitationskræfter, kan vi altid på mindre skala i rum og tid beskrive rødforskydningsprocessen i et lokalt Lorentz-system som en Doppler-forskydning. Det er en del af dna-en i Einsteins generelle relativitetsteori.

Transformationen mellem de to systemer GR og SR vil give os indsigt sammenhængen mellem GR-hastighed og SR-hastighed, specielt skal vi se, at uanset størrelsen af rødforskydningen, så bevæger ’galaksen’ sig ikke hurtigere end lyset. Det kan ses ved at transformere GR-hastigheden (som ingen øvre grænse har) til en SR-hastighed.

I artiklen omtales prikkerne på de to figurer som galakser – selv om de er masseløse!

De to koordinatsystemer og transformationen mellem dem

Men nu til de to koordinatsystemer og transformationen mellem dem.

Vi sidder som iagttager i punktet O (’Mælkevejen’). Til tidspunktet τ_0 (’nu’) betegner vi afstanden til en anden galakser (der følger Hubbleflowet) med s_0. Til tidspunktet τ er afstanden til denne galakse

(1) $s(\tau) = a(\tau) \cdot s_0$ afstande skaleres med skalafaktoren $a(\tau)$

Her er $a(\tau)$ skalafaktoren, som i Milnemodellen er særlig simpel, da der ikke er gravitationskræfter til at accelerere galakserne:

(2) $a(\tau) = k \cdot \tau = \tau/\tau_0$ Skalafaktor i Milnemodellen

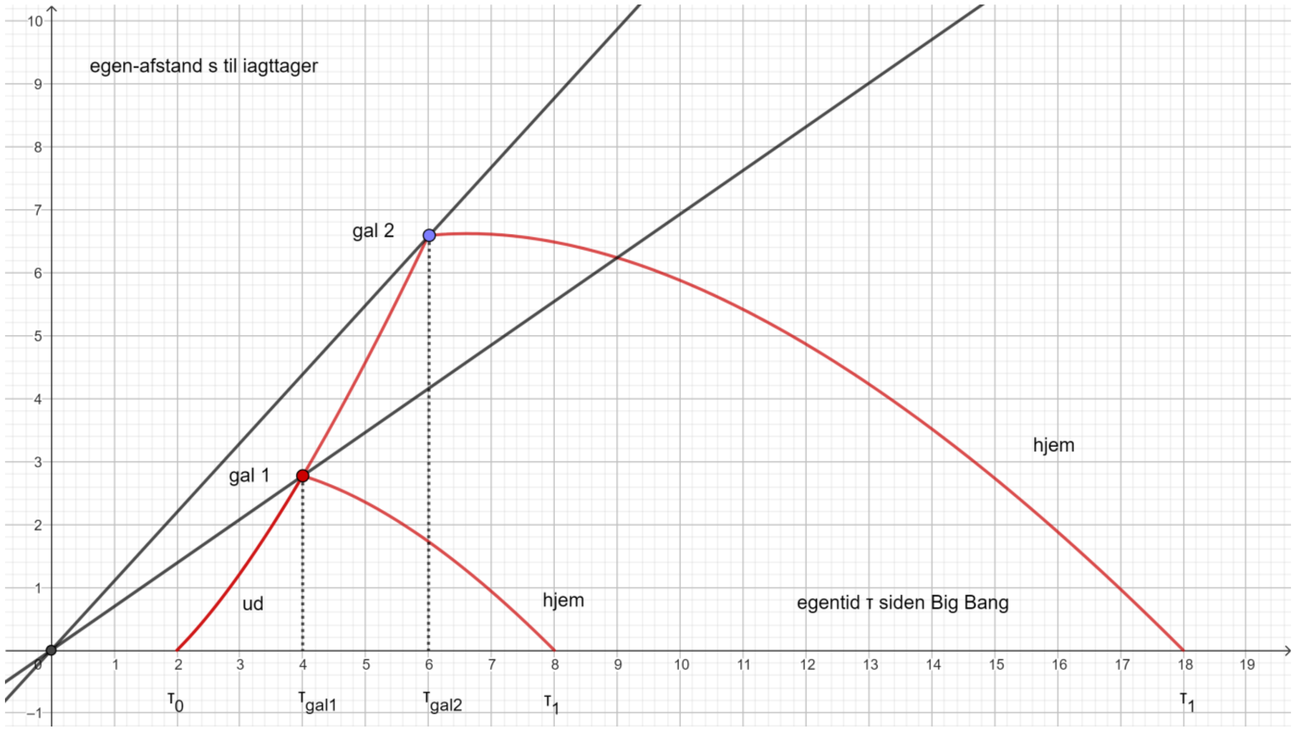
Galakserne fjerner sig fra iagttageren i O med konstant hastighed:

(3) $v_{GR} = \frac{s(\tau)}{\tau} = \frac{s_0}{\tau_0} = k \cdot s_0$ GR-hastighed for galakse

Da der ingen øvre grænse er for s_0, er der heller ingen øvre grænse for GR-hastigheden af galaksen.

Men hvordan ser beskrivelsen af galaksens bevægelse ud i GR-koordinater?

Vi (iagttageren i punktet O) sender en lysstråle fra vores position i O til tidspunktet τ_0. Lyset når den fjerne galakse til tidspunktet τ, og returnerer til iagttageren til tidspunktet τ_1 - se figur 3, hvor en lysstråle returneres fra to forskellige galakser gal 1 og gal 2. Lysets møde med galaksen fastlægger et punkt på galaksens (τ, s)-graf.



Figur 3: GR: Galaksespor (sorte) og lysspor (røde) - egentiden τ for en galakseposition fastlægges vha. en lysstråle, der returneres fra galaksen. Ud fra afsendelsestidspunktet τ_0 og returtidspunktet τ_1 beregnes det tidspunkt τ, hvor lyset ramte galaksen. Se formel (6) nedenfor. Afstanden s beregnes ved formel 7 nedenfor. Herved har vi fastlagt et punkt på galaksens (τ, s)-graf. Konstanten c er sat til 1.

Hvordan bestemmer vi så sammenhængen mellem de tre tidspunkter τ_0, τ_1 og τ

og deres sammenhæng med afstanden s_0 til galaksen?

Vi beregner egen-afstanden s_0 på to måder – en på lysstrålens vej ud til galaksen – og en på vejen tilbage:

(4) $$s_0 = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{c \cdot d\tau\prime}{a(\tau\prime)} = \frac{1}{k} c \cdot ln\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)$$ afstand på 'udtur' til galakse

(5) $$s_0 = \int_{\tau}^{\tau_1} \frac{c \cdot d\tau\prime}{a(\tau\prime)} = \frac{1}{k} c \cdot ln\left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)$$ afstand på 'hjemtur' fra galakse

Vi har her tilbageskrevet lysvejen $c \cdot d\tau'$ til tidspunktet τ_0 ved at dele med skalafaktoren $a(\tau')$.

Sammenligner vi de to udtryk for s_0, får vi sammenhængen

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{\tau_1}{\tau}$$

Heraf opnår vi:

(6) $$\tau = \sqrt{\tau_0 \cdot \tau_1}$$

Ser vi som et eksempel på figur 3, galakse 1, udsendes lyset fra iagttageren kl. 2 og returnerer kl. 8. Lyset har ramt galaksen kl. $\tau = \sqrt{2 \cdot 8} = 4$.

På figuren ses også af lys-sporet, at lysets hastighed er stigende på vej ud – ikke overraskende, da Hubbles lov fortæller os, at $v_{lys} = H \cdot s + c$, hvor Hubble-ekspansionen giver medfølgerhastigheden $H \cdot s$ for en given afstand til iagttageren. Tilsvarende ses, at lyset på tilbagevejen især i begyndelsen 'kæmper' mod ekspansionen, da $v_{lys} = H \cdot s - c$, særligt tydeligt for galakse 2.

De to formler for lysets hastighed nævnt herover er differentialligninger for lysets bevægelse, idet $v_{lys} = s'(\tau)$. Det er løsningerne til denne, der er indtegnet på figur 3. Løsningsfunktionerne for lysets bevægelse er

(7) $\quad s(\tau) = \pm c \cdot \tau \cdot \ln{(\tau/\tau_0)}$

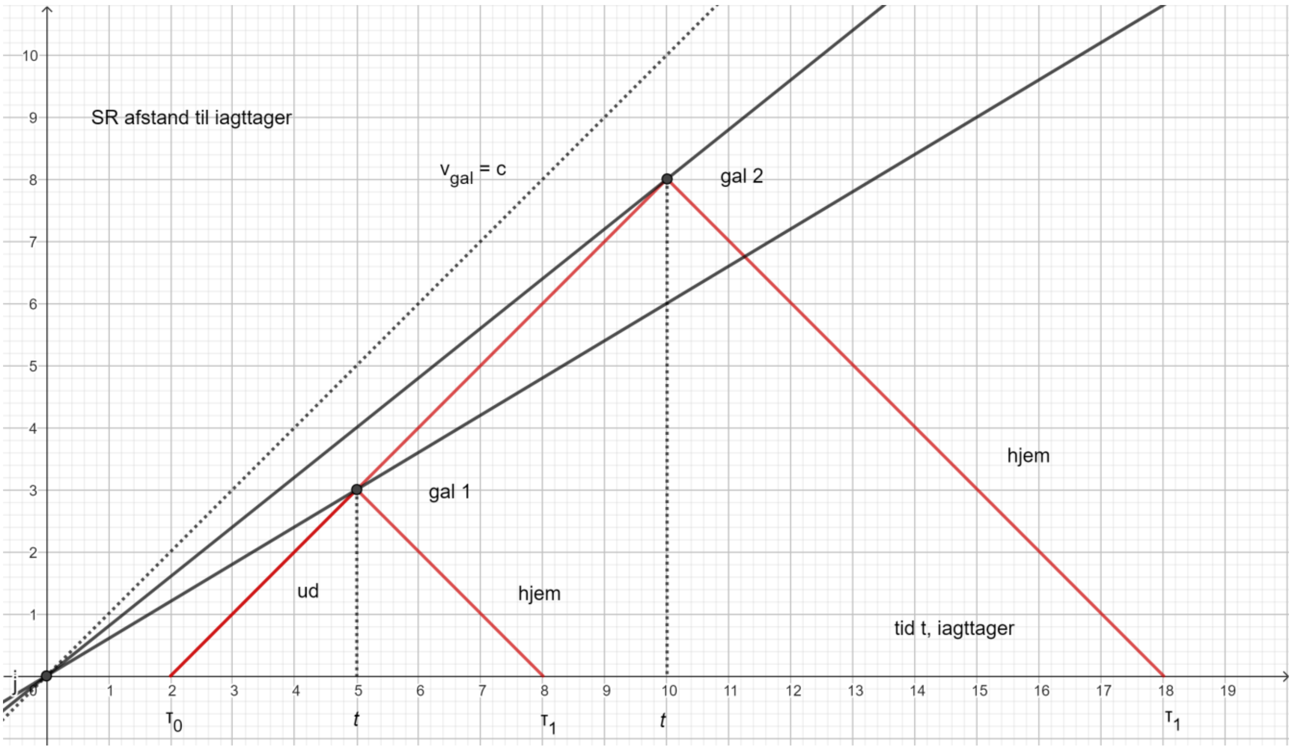
hvor τ_0 er skæringen med tidsaksen. Fortegnet plus for bevægelse væk fra iagttageren, og fortegnet minus ved bevægelse den modsatte vej.

Benytter vi formlerne (4) og (5) sammen med (6), får vi sammenhængene

(8) $\quad \tau_0 = \tau \cdot e^{-\frac{k \cdot s_0}{c}}$

(9) $\quad \tau_1 = \tau \cdot e^{\frac{k \cdot s_0}{c}}$

Nu kan vi så beregne koordinaterne for samme begivenhed (lysets møde med galaksen) i vort SR-system.



Figur 4: SR: Galaksespor og lysspor – samme hændelsesforløb som figur 3. Tidspunktet t for en galakseposition fastlægges ved at en lysstråle til tiden t returneres fra galaksen til iagttageren. Tidspunktet t, hvor lyset rammer galaksen, beregnes ud fra afsendelsestidspunktet τ_0 og returtidspunktet τ_1. Se formel (11) nedenfor. Lysets fart c er sat til 1.

De to tidspunkter τ_0 og τ_1 er målt af det samme ur på iagttagerens position O, og kan derfor bruges som SR-tider. Tiden i SR ud til galaksen er identisk med tiden hjem, og lysets fart er c begge veje. Derfor er

(10) $\quad x = c\frac{\tau_1 - \tau_0}{2}$

(11) $\quad t = \frac{\tau_1 + \tau_0}{2}$

Se lys-sporene i SR-koordinater på figur 4.

Fx er galakseafstanden *x* for galakse 1 $x = c\frac{\tau_1 - \tau_0}{2} = 1 \cdot \frac{8-2}{2} = 3$, og tiden t er $t = \frac{\tau_1 + \tau_0}{2} = \frac{8+2}{2} = 5$ som det fremgår af figuren.

Benytter vi nu (8) og (9), får vi

(12) $\quad x = c \cdot \tau \cdot \sinh\left(\frac{k \cdot s_0}{c}\right)$

(13) $\quad c \cdot t = c \cdot \tau \cdot \cosh\left(\frac{k \cdot s_0}{c}\right)$

idet jo $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ og $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

De to funktioner $\sinh(x)$ og $\cosh(x)$ opfylder iøvrigt følgende ligning

$$(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1$$

Benytter vi derfor (12) og (13), fås

(14) $\quad c^2 \cdot t^2 - x^2 = c^2 \cdot \tau^2$

Hermed har vi både sted x og tid t i SR-systemet.

Galaksens hastighed i SR-systemet er (også) konstant, og er

$$v_{SR} = \frac{x}{t} = \frac{c \cdot \tau \cdot \sinh\left(\frac{k \cdot s_0}{c}\right)}{\tau \cdot \cosh\left(\frac{k \cdot s_0}{c}\right)} = c \cdot \tanh\left(\frac{k \cdot s_0}{c}\right) = c \cdot \tanh\left(\frac{v_{GR}}{c}\right)$$

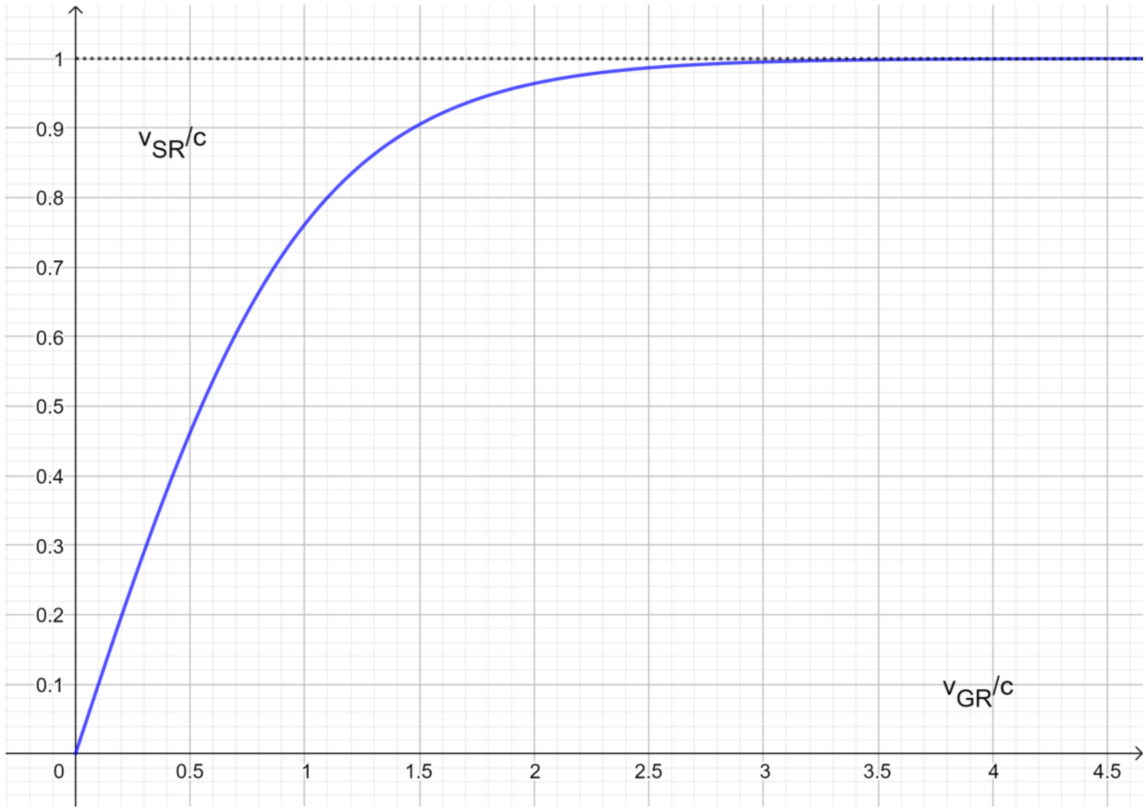
altså er

(15) $\quad v_{SR} = c \cdot \tanh\left(\frac{v_{GR}}{c}\right)$ $\qquad$ Galaksehastighed i GR og SR koordinatsystemer

idet vi også har benyttet (3).

Heraf ser vi, at galaksens SR-hastighed nærmer sig c når v_{GR}/c går mod uendelig.

På figur 5 ses grafisk sammenhængen mellem v_{GR} og v_{SR}.



Figur 5: v_SR som funktion af v_GR

Som det ses, er der ingen øvre grænse for v_{GR}, men det betyder ikke, at galaksen bevæger sig hurtigere end lyset, da $v_{SR} < c$.

Rødforskydning

Hvordan kommer vi nu fra tallet for rødforskydningen *z* til fx emissionstidspunkt, afstand til kilden mv?

For at bestemme tidspunktet for lysudsendelsen skal vi have skalafaktoren $a(\tau)$ i spil:

(16) $$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{a(\tau_0)}{a(\tau_e)}$$ rødforskydning

Her er τ_e emissionstidspunktet, λ_0 er den observerede bølgelængde og λ_e er bølgelængden af lyset set fra emittergalaksen (også kaldet laboratoriebølgelængden).

I tilfældet af Milnemodellen er skalafaktoren særlig simpel, se formel (2): $a(\tau) = \tau/\tau_0$

Herved bliver formel (16) til:

$$1 + z = \frac{\tau_0}{\tau_e}$$

Altså er emissionstidspunktet

(17) $$\tau_e = \frac{\tau_0}{1+z}$$ emissionstidspunkt

Fra dette emissionstidspunkt kan vi beregne afstanden til emittergalaksen på emissionstidspunktet (formel (7)):

(18) $$s(\tau_e) = -c \cdot \tau_e \cdot \ln\left(\frac{\tau_e}{\tau_0}\right) = c \cdot \tau_e \cdot \ln(1+z) = c \cdot \tau_0 \cdot \frac{1}{1+z} \cdot \ln(1+z)$$

hvor vi har benyttet (17).

Den nuværende afstand til emittergalaksen bliver derfor

(19) $$s_0 = (1+z) \cdot s(\tau_e) = c \cdot \tau_0 \cdot \ln(1+z)$$

Endelig kan vi beregne emittergalaksens hastighed (der er konstant i denne model):

(20) $$v = \frac{s_0}{\tau_0} = c \cdot \ln(1+z)$$ emittergalaksens hastighed

Er fx rødforskydningen $z = 10$, bliver

(21) $$v = c \cdot \ln(1+z) = c \cdot \ln(1+10) \approx 2{,}398 \cdot c$$ hastighed ved $z = 10$

Man kunne så spørge: er det hurtigere end lyset?

For at besvare dette spørgsmål skifter vi til SR-beskrivelsen, hvor vi ved, at lysets hastighed altid er c. Vi bruger oversættelsesformlen (15):

(22) $$v_{SR} = c \cdot \tanh\left(\frac{v_{GR}}{c}\right) = c \cdot \tanh(2{,}398) = 0{,}9836 \cdot c$$

Som det ses, overstiger galaksehastigheden ikke lysets hastighed.

Da vi nu har beregnet emittergalaksens hastighed i SR koordinater, kan vi her beregne rødforskydningen (som vi allerede kender!) med den velkendte SR-formel:

(23) $$1 + z = \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} = \sqrt{\frac{1+0{,}9836}{1-0{,}9836}} = 11{,}00$$

Beregningen kunne naturligvis også udføres eksakt, hvis man undlader den tilnærmede værdi i (21).

Dette viser, at vores beskrivelse kan udføres i begge koordinatsystemer, da vi jo kan oversætte fra GR-koordinater/hastigheder til SR-koordinater/hastigheder eller omvendt.

Inden man farer ud og råber: *overlyshastighed* må man spørge sig selv: er det mon det specielle koordinatsystem, der er anvendt her der giver dette sære resultat? Eller citeret fra ref. 2:

Next time you hear of something strange going on in cosmology remember to think 'Is this just because of the choice of coordinate system?'

Rødforskydning: Doppler på Doppler på…

Til sidst ser vi på, hvordan en stor rødforskydning (af nogen kaldet kosmologisk) kan opdeles i mange små Doppler-forskydninger (eller mere præcist: den store rødforskydning opstår ved en løbende Doppler-forskydning over lang tid i det ekspanderende Univers).

Vi ser her på den serie af rødforskydninger, en lysbølge undergår på den lange vej i Universet fra emitter til observatør.

Bølgelængden af lyset set fra emittergalaksen kalder vi som ovenfor λ_e, og bølgelængden målt af observatøren kaldes λ_0.

Bølgelængden set fra den første galakse, lyset passerer efter at have forladt emittergalaksen, betegner vi med λ_1, set fra den anden galakse kalder vi bølgelængden λ_2 osv.

Bølgelængden set fra den næstsidste galakse inden observatørgalaksen betegner vi med λ_{n-1}. Lysbølgen har således undergået i alt *n* rødforskydninger når den modtages af observatøren.

Vi har identiteten

(24) $$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{n-1}} \cdot \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_{n-2}} \cdot \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_{n-3}} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_e}$$

Vi indfører i denne ligning den globale z rødforskydning, samt de lokale rødforskydninger Δz:

(25) $$1 + z = (1 + \Delta z_n) \cdot (1 + \Delta z_{n-1}) \cdot (1 + \Delta z_{n-2}) \cdot \ldots \cdot (1 + \Delta z_2) \cdot (1 + \Delta z_1)$$

Hvis vi antager, at alle de lokale rødforskydninger er ens i størrelse (og som vi betegner med Δz), finder vi

(26) $$1 + z = (1 + \Delta z)^n$$ global rødforskydning z og lokal rødforskydning Δz

hvoraf

(27) $$\ln(1 + z) = n \cdot \ln(1 + \Delta z)$$

Er antallet *n* et stort tal, vil Δz være lille, og vi kan derfor lave tilnærmelsen $\ln(1 + \Delta z) \approx \Delta z$.

Derfor er:

$$\ln(1 + z) \approx n \cdot \Delta z$$

eller

(28) $$\Delta z \approx \frac{\ln(1+z)}{n}$$ lokal rødforskydning

Opdeler vi fx en rødforskydning på 10 i 1000 små rødforskydninger, bliver

(29) $$\Delta z \approx \frac{\ln(1+10)}{1000} = 0{,}002398$$

Denne lokale rødforskydning svarer efter Dopplerloven til, at den efterfølgende galakse har hastigheden

(30) $$v = \Delta z \cdot c = 0{,}002398 \cdot 300\,000\ \mathrm{km/s} = 719{,}4\ \mathrm{km/s}$$

i forhold til den forrige. Altså en helt igennem urelativistisk hastighed.

Hvis galakserne ikke med tiden ændrer hastighed (Milnemodel), vil emittergalaksen have hastigheden

(31) $$v_e = n \cdot v = 1000 \cdot 719{,}4\ \mathrm{km/s} = 719\,400\ \mathrm{km/s} = 2{,}398\ c$$

Læg mærke til, at det var den samme hastighed, vi fandt i Milnemodellen ovenfor.

I Milnemodellen (og kun i den) kan vi oversætte til en speciel relativitetsteori hastighed, nemlig

(32) $$v_{e,\ SR} = c \cdot \tanh(2{,}398) = 0{,}9836\ c$$

Altså (stadig) ikke hurtigere end lyset!

Årsagen til denne tilsyneladende 'overlyshastighed' er som nævnt det anvendte afstandsbegreb: afstanden til galaksen er summen af lokale egenafstande (afstande målt lokalt, i hvile i forhold til tætliggende galakser på lysets spor på vejen til os). Afstandene er således ikke – på trods af de store hastigheder der er involveret - Lorenz-forkortede, som i den specielle relativitetsteori. Derfor er der ingen øvre grænse for hastigheden.

Kunne vi have udregnet denne SR-galaksehastighed udelukkende ud fra en viden om, at galakserne på lysets vej til os parvis har en indbyrdes hastighed som angivet i (30)?

Svaret er ja – som det vises herunder.

Her skal vi 'addere' hastigheder i SR, og det gøres ved Lorentz-transformationen. Her skal vi dog addere 1000 hastigheder, hver af størrelsen 719,4 km/s.

Denne helt urelativistiske hastighed for fx den næstsidste galakse før iagttageren kan bruges i både GR-systemet og SR-systemet, da vi jo har oversættelsesformlen (15). For små hastigheder er der (næsten) ingen forskel i de to koordinatsystemer.

Til at addere hastigheder i SR bruger vi formlen

(33) $$v_{n,SR} = \frac{\left(1+\frac{v}{c}\right)^n - \left(1-\frac{v}{c}\right)^n}{\left(1+\frac{v}{c}\right)^n + \left(1-\frac{v}{c}\right)^n} \cdot c$$ *n* gentagne Lorentz-transformationer

hvor den anden galakse fjerner sig fra den første med hastigheden *v*, og den tredje galakse fjerner sig fra den anden med hastigheden *v* osv. Vi har med formel (33) adderet *n* ens hastigheder efter Lorentz-transformationen.

Formlen vises lettest ved at indføre begrebet *rapiditet*, se evt. ref. 3

Anvender vi (33) med $\frac{v}{c} = \frac{719{,}4 \text{ km/s}}{300\ 000 \text{ km/s}} = 0{,}002398$ får vi

(34) $$v_{1000,SR} = \frac{(1+0{,}002398)^{1000} - (1-0{,}002398)^{1000}}{(1+0{,}002398)^{1000} + (1-0{,}002398)^{1000}} \cdot c = 0{,}9836\ c$$

- altså samme SR-hastighed som (32).

Hermed ser vi den afgørende forskel på at addere hastigheder i Milne-GR-koordinater og SR-koordinater.

Nemlig forskellen på formlerne (31) og (34).

Med denne SR-hastighed kan vi (igen) udregne rødforskydningen vha. formlen

(35) $$1 + z = \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} = \sqrt{\frac{1+0{,}9836}{1-0{,}9836}} = 11{,}00$$

Igen svarende til rødforskydningen 10, som vi lagde ud med.

Formel (35) kan også 'vendes om', så vi udtrykker hastigheden ved rødforskydningen:

(36) $$\frac{v}{c} = \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1}$$

Heraf ses, at uanset størrelsen af *z* vil hastigheden *v* ikke overstige *c*.

Med $z = 10$ giver (36):

(37) $$\frac{v}{c} = \frac{(1+10)^2-1}{(1+10)^2+1} = \frac{120}{122} = 0{,}9836 \dots$$

- som forventet.

Når der er gravitationskræfter involveret, er galaksehastighederne selvfølgelig ikke konstante, heller ikke i Hubbleflowet. Derfor kan vi ikke gennemføre beregningen af emittergalaksens hastighed som ovenfor. Ikke desto mindre vil lyset fra en fjern galakse løbende undergå Dopplerforskydninger på lysets vej mod den næste galakse, der følger Hubble-flowet – indtil lyset til sidst havner i et af vore teleskoper.

Ref. 1: SIMON OLLING REBSDORF - Milnes kosmofysik ISSN: 1600-7433 Aarhus Universitet

Ref. 2: Cosmology, Special Relativity and the Milne Universe (chronon.org)

Ref. 3:
https://phys.libretexts.org/Bookshelves/University_Physics/Mechanics_and_Relativity_(Idema)/11%3A_Lorentz_Transformations/11.04%3A_Rapidity_and_Repeated_Lorentz_Transformations