En sumformel eller to - om interferens

- fra borgeleo.dk

Vi ønsker - af en eller anden grund - at beregne summen

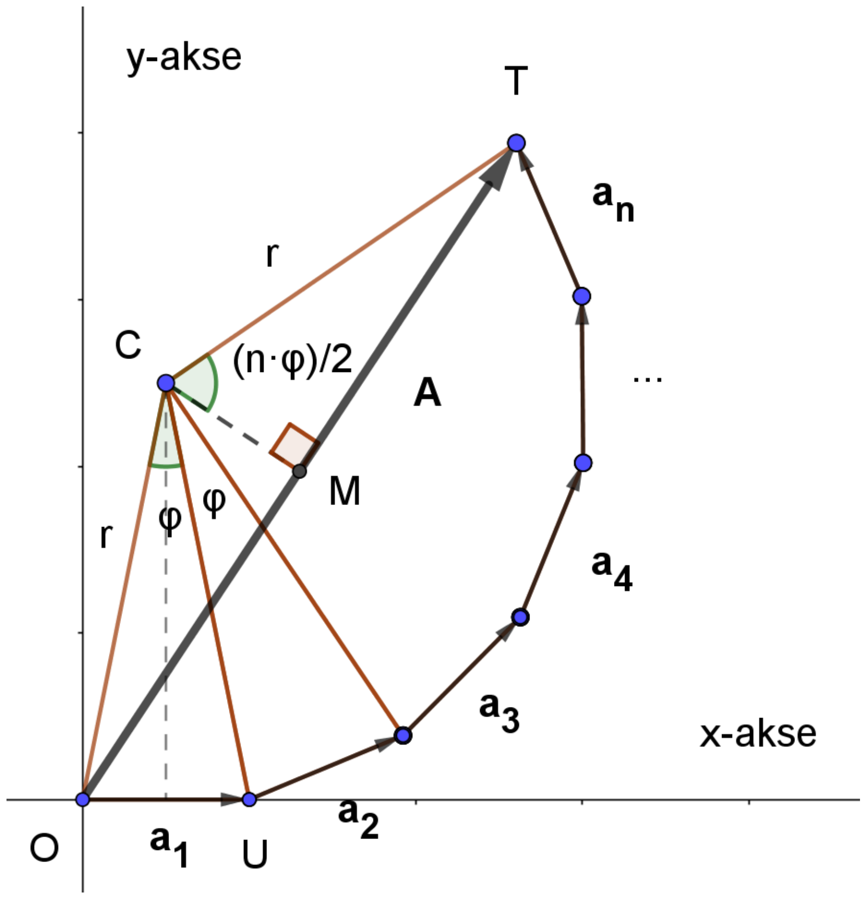
$$A_x = \cos(0) + \cos(\varphi) + \cos(2\varphi) + \cdots + \cos((n-1)\varphi)$$

og

$$A_y = \sin(0) + \sin(\varphi) + \sin(2\varphi) + \cdots + \sin((n-1)\varphi)$$

hvor φ er faseforskydningen fra et led til næste led i summerne.

Dette vil vi gøre geometrisk, se figur 1



Figur 1: geometrisk addition af sinus og cosinus-led

Vi vil beregne summerne ved hjælp af vektorer, således er

$$\vec{a}_1 = \binom{\cos(0)}{\sin(0)},\ \ \vec{a}_2 = \binom{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)},\ \ \vec{a}_3 = \binom{\cos(2\varphi)}{\sin(2\varphi)},\ \ \dots\ ,\ \vec{a}_n = \binom{\cos((n-1)\cdot\varphi)}{\sin((n-1)\cdot\varphi)}$$

Hver af disse vektorer har amplituden (længden) $a = 1$.

Vi vil beregne vektorsummen

$$\vec{A} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + a_3 + \cdots + \vec{a}_n$$

Det er herefter klart, at A_x og A_y er hhv. x-koordinaten og y-koordinaten for $\vec{A}$.

Vi begynder med at beregne radius i cirklen med centrum C og radius $r = |OC|$, se figur 1.

Ved at dele trekant OCU i to retvinklede trekanter finder vi

$$\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}\cdot 1}{r}$$

Vi deler nu tilsvarende trekanten OCT i to retvinklede trekanter. Vinklen OCT er $n \cdot \varphi$, derfor bliver

$$\sin\left(\frac{n\cdot\varphi}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}\cdot A}{r}$$

hvor A er længden af vektoren $\vec{A}$.

Vi deler de to ligninger med hinanden, og får

$$\frac{\sin\left(\frac{n\cdot\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{A}{1}$$

hvoraf

$$A = \frac{\sin\left(\frac{n\cdot\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

Men hvordan finder vi så koordinaterne for vektoren $\vec{A}$ - og ikke bare længden af denne?

Hertil skal vi finde vinklen mellem vektoren $\vec{A}$ og x-aksen, se figur 1.

Linjen OC danner vinklen $\varphi/2$ med y-aksen, og vinklen COM har størrelsen $90° - n \cdot \varphi/2$. Herved bliver vinklen mellem vektoren $\vec{a}_{RS}$ og x-aksen $90° - \frac{\varphi}{2} - \left(90° - n \cdot \frac{\varphi}{2}\right) = (n-1) \cdot \frac{\varphi}{2}$

Derfor bliver koordinaterne for vektoren $\vec{A}$:

$$A_x = A \cdot \cos((n-1) \cdot \frac{\varphi}{2})$$

og

$$A_y = A \cdot \sin((n-1) \cdot \frac{\varphi}{2})$$

Derved har vi vist formlerne

$$\cos(0)+\cos(\varphi)+\cos(2\varphi)+\cdots+\cos\big((n-1)\varphi\big)=\frac{\sin\left(\frac{n\cdot\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\cdot\cos((n-1)\cdot\frac{\varphi}{2}) \qquad (1)$$

og

$$\sin(0)+\sin(\varphi)+\sin(2\varphi)+\cdots+\sin\big((n-1)\varphi\big)=\frac{\sin\left(\frac{n\cdot\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\cdot\sin((n-1)\cdot\frac{\varphi}{2}) \qquad (2)$$

Men kunne vi også finde summerne hvis hvert cosinus/sinus-led var yderligere faseforskudt med en fase, der er ens for alle leddene? Det kunne fx være fasen $\omega\cdot t$, hvor ω er vinkelfrekvensen og t er tiden

Altså summerne

$$A_x=\cos(\omega\cdot t)+\cos(\omega\cdot t+\varphi)+\cos(\omega\cdot t+2\varphi)+\cdots+\cos(\omega\cdot t+(n-1)\varphi)$$

og

$$A_y=\sin(\omega\cdot t)+\sin(\omega\cdot t+\varphi)+\sin(\omega\cdot t+2\varphi)+\cdots+\sin(\omega\cdot t+(n-1)\varphi)$$

Også disse summer kan vi nemt klare, idet vi roterer figur 1 en vinkel $\omega\cdot t$ i positiv omløbsretning omkring centrum C. Vinklen med x-aksen forøges herved med $\omega\cdot t$, og formlerne for R og S ændres til

$$\cos(\omega\cdot t)+\cos(\omega\cdot t+\varphi)+\cos(\omega\cdot t+2\varphi)+\cdots+\cos(\omega\cdot t+(n-1)\varphi)$$
$$=\frac{\sin\left(\frac{n\cdot\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\cdot\cos(\omega\cdot t+(n-1)\cdot\frac{\varphi}{2}) \qquad (3)$$

og

$$\sin(\omega\cdot t)+\sin(\omega\cdot t+\varphi)+\sin(\omega\cdot t+2\varphi)+\cdots+\sin(\omega\cdot t+(n-1)\varphi)$$
$$=\frac{\sin\left(\frac{n\cdot\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\cdot\sin(\omega\cdot t+(n-1)\cdot\frac{\varphi}{2}) \qquad (4)$$

Det er således klart, at amplituden for den resulterende svingning er $\frac{\sin\left(\frac{n\cdot\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$, uanset om vi adderer de n cosinusled eller sinusled.

Med andre betegnelser for de variable kan formlerne skrives

$$\cos(x)+\cos(x+y)+\cos(x+2y)+\cdots+\cos(x+(n-1)y)=\frac{\sin\left(\frac{n\cdot y}{2}\right)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}\cdot\cos(x+(n-1)\cdot\frac{y}{2}) \qquad (5)$$

og

$$\sin(x) + \sin(x+y) + \sin(x+2y) + \cdots + \sin(x+(n-1)y) = \frac{\sin\left(\frac{n\cdot y}{2}\right)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)} \cdot \sin\left(x + (n-1)\cdot\frac{y}{2}\right) \quad (6)$$

Eksempler:

$$\cos(x) + \cos(x+1) + \cos(x+2) = \frac{\sin(3\cdot 0{,}5)}{\sin(0{,}5)} \cdot \cos(x+1)$$

$$\sin(x) + \sin(x+1) + \sin(x+2) = \frac{\sin(3\cdot 0{,}5)}{\sin(0{,}5)} \cdot \sin(x+1)$$

$$\cos(0) + \cos(1) + \cos(2) + \cos(3) + \cos(4) = \frac{\sin(5\cdot 0{,}5)}{\sin(0{,}5)} \cdot \cos(2)$$

Formlerne kan også bruges til at beregne interferensen mellem mange bølger med samme amplitude og med konstant faseforskel, fx bølgerne bag et optisk gitter.

Intensiteten af fx lysbølger, der interfererer, vil være proportional med kvadratet på den resulterende bølges amplitude. Altså

$$I(\varphi) = I_0 \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{n\cdot\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\right)^2 \quad (7)$$

Her er I_0 intensiteten hvis der kun er et led i formlen.

Hvis vi indfører betegnelsen

$$x = \frac{n\cdot\varphi}{2\pi}$$

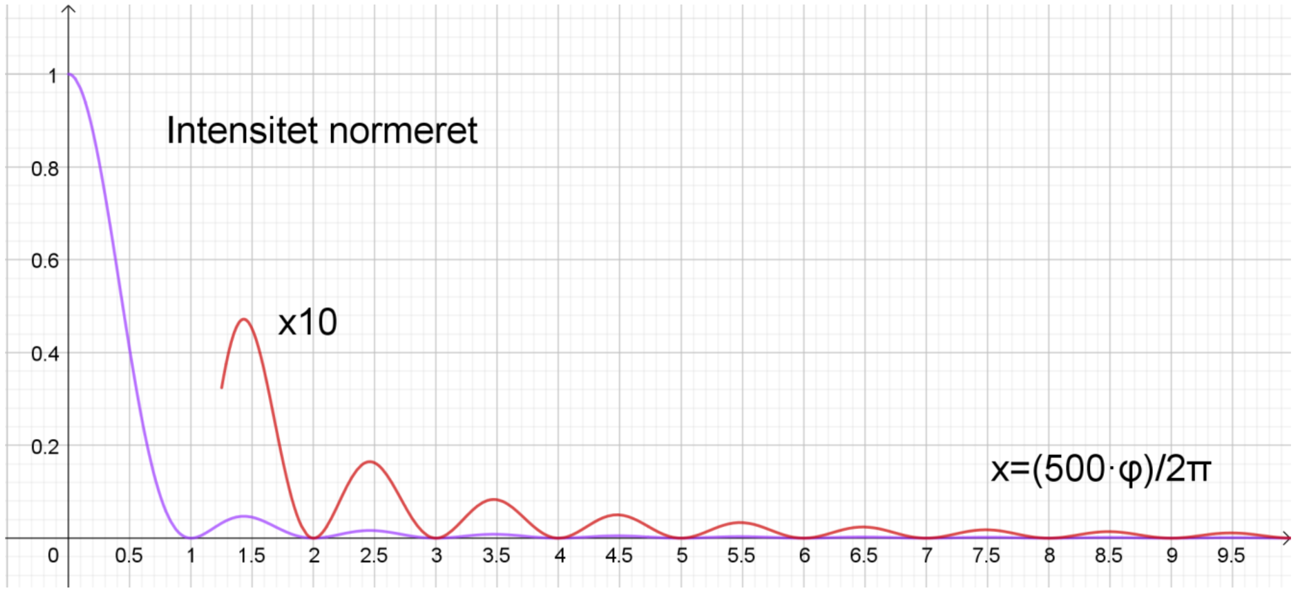
vil x være et mål for, hvor langt vi er kommet rundt på cirklen på figur 1, således at hvis $x = 1$, vil de n vektorer netop danne en hel cirkel, idet jo x-formlen ovenfor giver $n\cdot\varphi = 2\pi$, og den resulterende amplitude vil være 0. Hvis $x = 2$, vil vi være nået 2 gange rundt på cirklen, og den resulterende amplitude vil igen være 0 osv.

Formlen for intensiteten med x som variabel bliver

$$I(x) = I_0 \cdot \left(\frac{\sin(\pi\cdot x)}{\sin\left(\frac{\pi\cdot x}{n}\right)}\right)^2$$

På figur 2 har vi valgt $n = 500$, så summen indeholder 500 cosinus- (eller sinus-) led, med en faseforskydning mellem hvert led på

$$\varphi = \frac{2\pi\cdot x}{500}$$



Figur 2: intensiteten (kvadratet på amplituden) for summen af 500 cosinusled som funktion af faseforskellen

Vi ser, at intensiteten (den lilla graf) falder hurtigt af ved voksende faseforskydning og bliver 0 når x rammer et helt tal (destruktiv interferens). Maksima ud over det centrale nås omtrent midt mellem de hele tal. Her når summen af de 500 pile toppen af cirklen på figur 1. Den røde graf viser intensiteten ganget med an faktor 10. Det første maksimum efter den centrale top kan ses at være ca. 4,7% af maksimal-intensiteten, det næste maksimum omtrent 1,6% af maksimal intensitet osv.

Intensiteten af den centrale top kan nemt findes af formel (7) for små faseforskydninger φ:

$$I(\varphi) = I_0 \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{n\cdot\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\right)^2 \approx I_0 \cdot \left(\frac{\frac{n\cdot\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}}\right)^2 = I_0 \cdot n^2 \quad \text{- når } \varphi \text{ er tæt på 0}$$

Dette er selvfølgelig ikke overraskende, da alle de n led i amplitude-summen er tæt på 1 - så summen giver n. Intensiteten af den centrale top forstærkes derfor kraftigt med antallet af led i summen.

Anvendelse: det optiske gitter

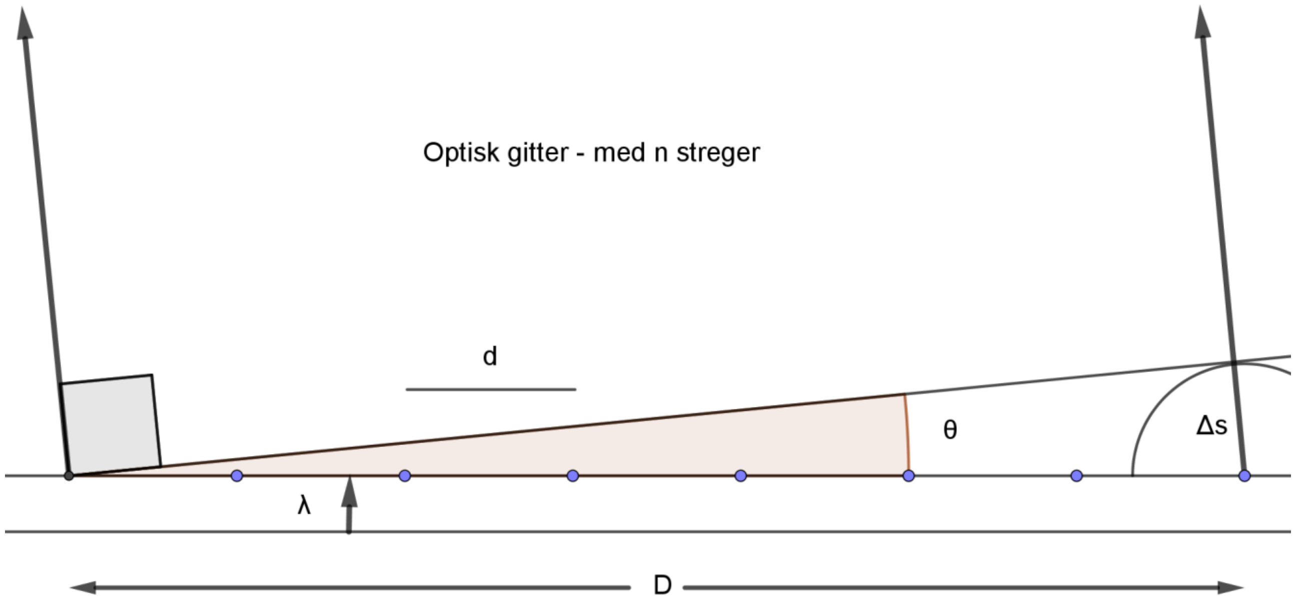
Her er forskellige anvendelser:

a) Den enkelte spektrallinjes centraltop med sidelinjer som vist på figur 2
b) Det optiske gitters forskellige ordener
c) Spektral opløsningsevne for optisk gitter

Den enkelte spektrallinje: centraltop og sidelinjer

Vi ser på et optisk gitter, hvor laserstrålen rammer vinkelret ind på gitteret. Vi antager, at laserstrålen har bredden L (fx 0,5 mm) og at den belyser n gitterstreger i gitteret.

Vi ser på interferensen af alle n ringbølger i laserstrålens bredde i retningen givet ved vinklen θ, målt i forhold til normalen til gitteret, se fig. 3. Bølgerne fra alle streger i gitteret vil interferere i lang afstand fra gitteret i pilenes retning.



Figur 3: interferens mellem n cirkelbølger i retning θ i forhold til normalen til gitteret

Vi har sammenhængen

$$n \cdot d \cdot \sin(\theta) = \Delta s$$

For at omsætte afstanden Δs til en faseforskel mellem 1. bølge og n. bølge, skal vi dele Δs med bølgelængden λ og gange med 2π:

$$n \cdot \varphi = 2\pi \cdot \frac{\Delta s}{\lambda} = 2\pi \cdot \frac{n \cdot d \cdot \sin(\theta)}{\lambda} \qquad (8)$$

Faseforskellen mellem to nabostreger er $\varphi = 2\pi \cdot \frac{d \cdot \sin(\theta)}{\lambda}$

I 0. orden (se senere) finder vi, at når $\Delta s = \lambda$, vil $n \cdot \varphi = 2\pi$, og vil er nået 1 gang rundt på cirklen på figur 1. Faserne for de n bølger varierer fra 0° for den første til 360° for den sidste. Bølgerne interfererer derfor destruktivt, og vi når intensitetsnulpunktet med $x = 1$ på figur 2. Vinklen θ er bestemt af ligningen

$$2\pi = 2\pi \cdot \frac{n \cdot d \cdot \sin(\theta)}{\lambda}$$

eller

$$\sin(\theta) = \frac{\lambda}{n \cdot d} = \frac{\lambda}{D} \qquad \text{1. intensitets-nulpunkt} \qquad (9)$$

Det andet intensitetsnulpunkt nås, når $\Delta s = 2 \cdot \lambda$, og $n \cdot \varphi = 4\pi$. Ligningen for vinklen θ bliver så:

$$\sin(\theta) = \frac{2\lambda}{n \cdot d} = \frac{2\lambda}{D} \qquad \text{2. intensitets-nulpunkt} \qquad (10)$$

Eksempel:

Antag, at laserstrålen er 0,5 mm bred hvor den rammer det optiske gitter, og at det optiske gitter har 300 streger pr mm. Der vil derfor være 150 streger, der 'aktive', når gitteret belyses. Gitterkonstanten er 1/300 mm eller 3333 nm. Laserens bølgelængde antages at være 532 nm. Heraf finder vi:

$$\sin(\theta) = \frac{\lambda}{D} = \frac{532\ \text{nm}}{500000\ \text{nm}} = 0{,}00106$$

som giver

$\theta = 0{,}061°$ 1. intensitets-nulpunkt

og tilsvarende

$\theta = 0{,}122°$ 2. intensitets-nulpunkt

Det skal bemærkes, at disse beregninger kun gælder i 0. orden.

Hvis skærmen er 1 m fra det optiske gitter, vil afstanden til centralpletten være hhv. 1 mm og 2mm. Afstanden mellem de to intensitetsnulpunkter nærmest centraltoppen vil være 2 mm og de næst-nærmeste vil have afstanden 4 mm.

Vælges et optisk gitter med større gitterkonstant, vil det ikke have nogen indflydelse på disse vinkler, da $n \cdot d = D$ der er bredden af laserstrålen.

Vi vil altså se en centraltop i 0. orden med intensitetsnulpunkter og toppe som på figur 2 - hvor x er målt i mm.

Hvis vi omvendt måler disse afstande, kan laserstrålens effektive bredde bestemmes.

Gitterets forskellige ordener

I formel (7) for intensiteten kan vi erstatte faseforskellen φ mellem de enkelte oscillatorer med $\varphi + m \cdot 2\pi$, hvor m er det såkaldte ordenstal ($m = 0,1,2,..$) - uden at ændre på intensitetens værdi.

Vi vil derfor få stærke toppe hver gang φ passerer $m \cdot 2\pi$, med svage sidelinjer præcis som på fig. 2. Alle oscillatorerne er i fase (idet den næste oscillator i rækken er m hele svingninger foran/bagefter den forrige).

For at finde de tilhørende vinkler, bruger vi formel (8)

$$n \cdot \varphi = 2\pi \cdot \frac{n \cdot d \cdot \sin(\theta)}{\lambda}$$

hvoraf

$$\varphi = 2\pi \cdot \frac{d \cdot \sin(\theta)}{\lambda}$$

Vi erstatter φ med $m \cdot 2\pi$ (og ser således alene på retninger med konstruktiv interferens mellem alle ringbølgerne):

$$m \cdot 2\pi = 2\pi \cdot \frac{d \cdot \sin(\theta)}{\lambda}$$

og deler med 2π på begge sider:

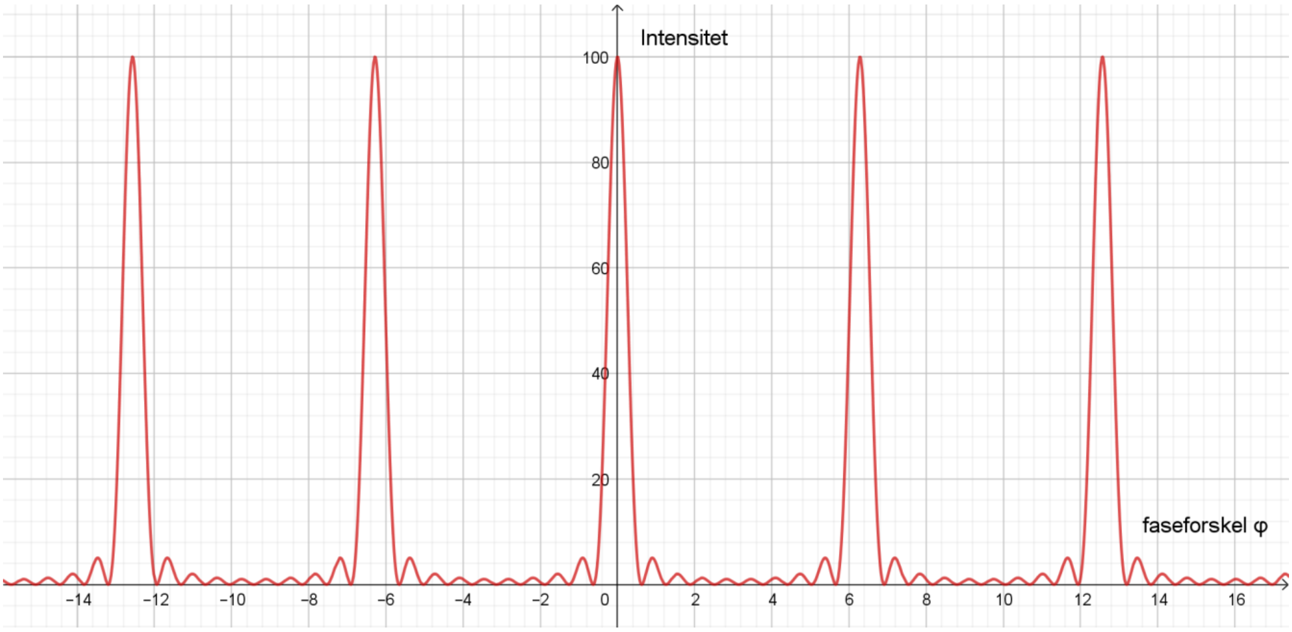
$$m = \frac{d \cdot \sin(\theta)}{\lambda}$$

Heraf finder vi endelig:

$$m \cdot \lambda = d \cdot \sin(\theta) \qquad \textbf{Gitterligningen} \qquad (11)$$

Dette er den velkendte gitterligning, der knytter bestemte retninger/vinkler til konstruktiv interferens mellem alle ringbølger fra gitteret. Således vil afstanden til to nabostreger i gitteret være $m \cdot \lambda$ - når den bedømmes fra et punkt langt fra gitteret i retningen bestemt af vinklen θ, jf. fig. 3.

På nedenstående figur (figur 4) er intensiteten (7) afbildet som funktion af faseforskellen φ mellem de enkelte streger i gitteret. Her er valgt $n = 10$, så der altså kun er 10 belyste streger i gitteret. Det fremgår, at vi har konstruktiv interferens mellem alle bølger hver gang φ passerer et helt antal ganget med 2π.



Figur 4: intensiteten $I(\varphi)$ hvor φ er faseforskellen mellem to nabostreger i gitteret

Hvilke bølgelængder kan vi se forskel på?

Bredden af det centrale intensitets-maksimum vist på figur 2 gør, at to spektrallinjer kan ligge så tæt på hinanden, at vi ikke kan skelne dem fra hinanden. Men hvor tæt er det?

For at besvare dette spørgsmål ser vi på figur 2. Hvis en spektrallinje af en given orden har sit maksimum i den centrale top, og en anden spektrallinje med en bølgelængde tæt på den første (i samme orden) har sin centrale top placeret i det første intensitets-nulpunkt for den første, har vi defineret, hvad vi forstår ved usikkerheden på bølgelængden - og dermed hvor tæt de to spektrallinjer kan være på hinanden uden at de 'flyder sammen'.

Vi vil bruge teorien til at præcisere denne definition (også kaldet *Rayleighs kriterium*)

Vi ser på figur 2 og vi forestiller os, at en spektrallinje med bølgelængden λ har konstruktiv interferens i retningen givet ved vinklen θ i m. orden, sådan at gitterligningen er opfyldt:

$$d \cdot \sin(\theta) = m \cdot \lambda$$

Vi ganger nu med det hele tal n på begge sider (antallet af 'aktive' linjer i gitteret):

konstruktiv interferens i retning θ, bølgelængde λ:

$$n \cdot d \cdot \sin(\theta) = n \cdot m \cdot \lambda$$

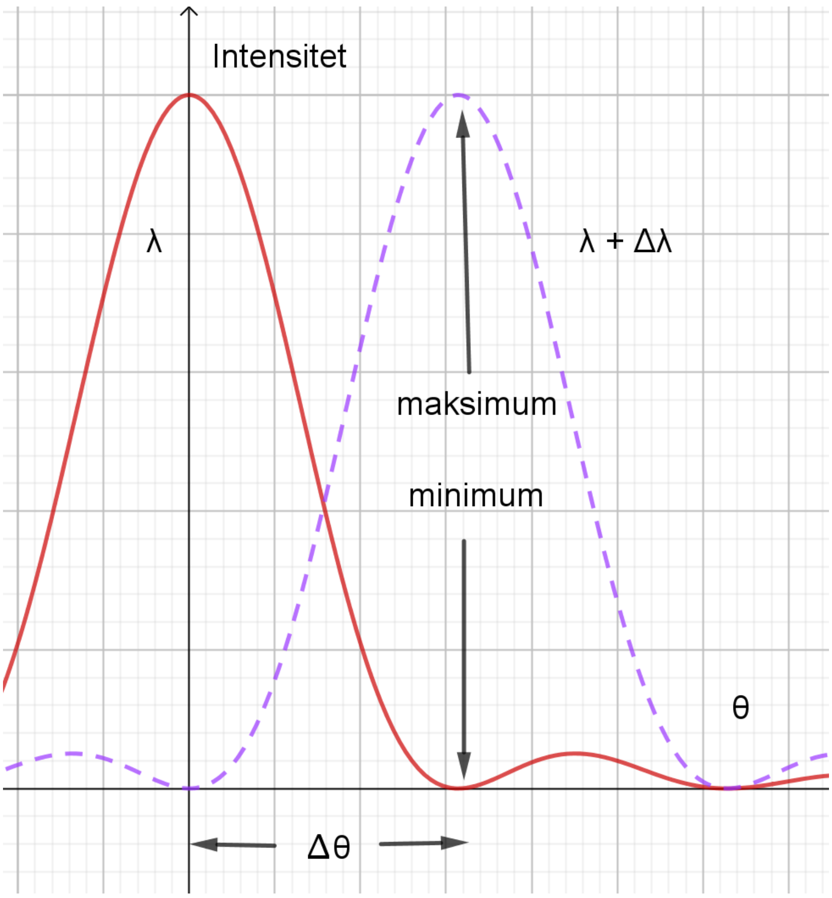
Venstresiden genkendes som afstanden Δs på figur 2.

Hvis vi forøger afstanden Δs med en bølgelængde (og derved ændrer vinklen θ til $\theta + \Delta\theta$), vil bølgerne fra alle 'aktive' streger i gitteret give destruktiv interferens i den nye retning, som forklaret i forbindelse med figur 2. Vi får så:

destruktiv interferens i retning $\theta + \Delta\theta$, bølgelængde λ:

$$n \cdot d \cdot \sin(\theta + \Delta\theta) = n \cdot m \cdot \lambda + \lambda \qquad (12)$$

Vi forestiller os nu, at en enden spektrallinje med bølgelængden $\lambda + \Delta\lambda$ - ligeledes i m-de orden - har konstruktiv interferens i samme retning $\theta + \Delta\theta$.



Figur 5: Rayleigh kriteriet - maksimum møder minimum

Denne vil opfylde

konstruktiv interferens i retning $\theta + \Delta\theta$, bølgelængde $\lambda + \Delta\lambda$:

$$n \cdot d \cdot \sin(\theta + \Delta\theta) = n \cdot m \cdot (\lambda + \Delta\lambda) \qquad (13)$$

Højresiderne i de to ligninger må være ens, da jo venstresiderne er det. Derfor må

$$n \cdot m \cdot (\lambda + \Delta\lambda) = n \cdot m \cdot \lambda + \lambda$$

Isoleres $\Delta\lambda$ i ovenstående ligning, finder vi

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{n \cdot m}$$

Den relative usikkerhed på bølgelængden bliver derfor

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{n \cdot m} \qquad \textit{Rayleighs kriterium}$$

Hvis vi udtrykker antallet af 'aktive' streger ved laserstrålens bredde D, er $D = n \cdot d$, hvoraf

$$n = \frac{D}{d}$$

Kombinerer vi de sidste to ligninger, får vi

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{d}{m \cdot D} \qquad \text{opløsning i bølgelængden i } m\text{. orden} \qquad (14)$$

Ofte udtrykkes et gitters opløsningsevne ved bogstavet R (resolution):

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = n \cdot m \qquad \textit{Opløsningsevne} \qquad (15)$$

I 1. orden er gitterets opløsningsevne derfor lig med antallet af 'aktive' streger i gitteret

Eksempel - mindste afstand mellem spektrallinjer

Vi antager, at laserstrålens bredde er $D = 0{,}5$ mm, og at vi ser på 1. orden. Desuden antager vi, at bølgelængden er $\lambda = 532$ nm.

Herved bliver

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{3333 \text{ nm}}{1 \cdot 500000 \text{ nm}} = 0{,}67\%$$

og altså

$$\Delta\lambda = 532 \text{ nm} \cdot 0{,}0067 = 3{,}5 \text{ nm}$$

Hvis altså en anden spektrallinje ligger tættere end 3,5 nm på linjen med $\lambda = 532$ nm, vil det ikke være muligt at skelne de to linjer fra hinanden med denne bredde af det belyste område på gitteret.

Eksempel - opløsning af de to gule D-linjer i natriumspektret

I natriumspektret er der to tætliggende spektrallinjer med bølgelængderne $588{,}9950$ nm og $589{,}5924$ nm, svarende til de to overgange $3p_{\frac{3}{2}} \rightarrow 3s_{\frac{1}{2}}$ og $3p_{\frac{1}{2}} \rightarrow 3s_{\frac{1}{2}}$. Forskellen skyldes elektronens spin (op eller ned), den såkaldte spin-banekobling.

Vi beregner den nødvendige spektralopløsning i 1. orden:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{589{,}2937 \text{ nm}}{0{,}5974 \text{ nm}} = 986 = n \cdot 1$$

Her er 589,2937 nm middelbølgelængden for de to spektrallinjer. Altså skal der være ca. 1000 'aktive' streger i gitteret, svarende til en opløsning på 0,1 % i bølgelængde, hvis de to spektrallinjer skal kunne separeres.

Men hvad med opløsningsevnen udtrykt ved vinklen θ ?

Vi tager udgangspunkt i ligningerne (12) og (13) og trækker dem fra hinanden:

$$n \cdot d \cdot (\sin(\theta + \Delta\theta) - \sin(\theta)) = n \cdot m \cdot (\lambda + \Delta\lambda) - n \cdot m \cdot \lambda$$

Vi går nu ud fra, at $\Delta\theta$ er en lille vinkel, så vi kan rækkeudvikle sinus til 1. orden - samtidig med, at højresiden reduceres:

$$n \cdot d \cdot \cos(\theta) \cdot \Delta\theta = n \cdot m \cdot \Delta\lambda$$

$\Delta\theta$ isoleres:

$$\Delta\theta = \frac{m \cdot \Delta\lambda}{d \cdot \cos(\theta)}$$

Vi heri indfører, at $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{n \cdot m}$ og får

$$\Delta\theta = \frac{m \cdot \Delta\lambda}{d \cdot \cos(\theta)} = \frac{m}{d \cdot \cos(\theta)} \cdot \frac{\lambda}{n \cdot m} = \frac{\lambda}{n \cdot d \cdot \cos(\theta)}$$

eller

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{D \cdot \cos(\theta)} \qquad \text{opløsningsevne i vinkel} \qquad (16)$$

hvor D er bredden af det belyste område på det optiske gitter.

Eksempel: vi fortsætter eksemplet ovenfor. Vinklen θ beregnes af gitterligningen

$$\sin(\theta) = \frac{m \cdot \lambda}{d} = \frac{1 \cdot 532 \text{ nm}}{3333 \text{ nm}} = 0{,}1596 \qquad \text{hvoraf } \theta = 9{,}18°$$

Formel (15) giver så:

$$\Delta\theta = \frac{532\ nm}{500000\ nm \cdot \cos(9{,}13°)} = 1{,}08 \cdot 10^{-3} = 0{,}062°$$

Dette stemmer (naturligvis) godt med beregningen i 0. orden tidligere.

Børge Nielsen, november 2018