Fordampning af sorte huller – Hawkingstråling

https://en.wikipedia.org/wiki/Hawking_radiation

Ifølge Stephen Hawking har overfladen af begivenhedshorisonten af et sort hul temperaturen

(1) $T = \frac{\hbar \cdot c^3}{8\pi \cdot G \cdot M \cdot k_B}$ Hawking–Zel'dovich strålingstemperatur

Det sorte hul udsender sortlegemestråling(!). SI-enheden for T er (naturligvis) K.

(Dette er nok en forenklet fremstilling, se linket ovenfor. Men jeg anvender her det kendte KISS-princip – Keep It Simple Stupid)

Her er $\hbar$ Plancks konstant delt med 2π, c er lysets fart i vacuum, G er Newtons gravitationskonstant, og endelig er k_B Boltzmanns konstant. M er massen af det sorte hul.

Det sorte hul udsender sortlegemestråling med en intensitetsfordeling givet ved den såkaldte Planck-fordeling. Den integrerede intensitetsfordeling - ganget med overfladen af det sorte huls begivenhedshorisont – giver den udstrålede effekt P. Udtrykket er

(2) $P = 4\pi \cdot r_S^2 \cdot \sigma \cdot T^4$

Her er σ Stefan-Boltzmanns konstant, og r_S er Schwarzschild-radius:

(3) $r_S = \frac{2G \cdot M}{c^2}$

Kombinerer vi disse ligninger, får vi

(4) $P = 4\pi \cdot \left(\frac{2G \cdot M}{c^2}\right)^2 \cdot \sigma \cdot (\frac{\hbar \cdot c^3}{8\pi \cdot G \cdot M \cdot k_B})^4 = konst \cdot \frac{1}{M^2}$

Herved mister det sorte hul masse, og sammenhængen med den udsendte effekt er

(5) $P = -\frac{dM}{dt} \cdot c^2$

Kombinerer vi (4) og (5), fås differentialligningen

$$\frac{dM}{dt} \cdot c^2 = -4\pi \cdot \left(\frac{2G}{c^2}\right)^2 \cdot \sigma \cdot (\frac{\hbar \cdot c^3}{8\pi \cdot G \cdot k_B})^4 \cdot \frac{1}{M^2}$$

Eller – reduceret:

$$\frac{dM}{dt} = -16\pi \cdot \frac{c^2}{G^2} \cdot \sigma \cdot \left(\frac{\hbar \cdot c}{8\pi \cdot k_B}\right)^4 \cdot \frac{1}{M^2}$$

Eller bare

(6) $\frac{dM}{dt} = -k \cdot \frac{1}{M^2}$ hvor $k = 16\pi \cdot \frac{c^2}{G^2} \cdot \sigma \cdot \left(\frac{\hbar \cdot c}{8\pi \cdot k_B}\right)^4$

Separerer vi de variable i (6), fås

$$M^2 \cdot dM = -k \cdot dt$$

Som integreret giver

$$\frac{1}{3} \cdot M^3 = -k \cdot t + c$$

Som begyndelsesbetingelse sætter vi $M(0) = M_0$. Herved bliver

$$\frac{1}{3} \cdot M_0^3 = -k \cdot 0 + c$$

hvoraf

$$c = \frac{1}{3} \cdot M_0^3$$

Altså afhænger massen *M* af det sorte hul at tiden på følgende måde:

$$\frac{1}{3} \cdot M^3 = \frac{1}{3} \cdot M_0^3 - k \cdot t$$

hvoraf

(7) $M(t) = \sqrt[3]{M_0^3 - 3 \cdot k \cdot t} = M_0 \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{t}{t_0}}$ hvor t_0 er levetiden af det sorte hul

Levetiden af det sorte hul bliver (*M* = 0):

$$t_0 = \frac{M_0^3}{3 \cdot k}$$

Herved bliver (hvis levetiden er kendt)

(8) $M_0 = \sqrt[3]{3 \cdot k \cdot t_0}$

Konstanten k kan udregnes til

$$k = 16\pi \cdot \frac{c^2}{G^2} \cdot \sigma \cdot \left(\frac{\hbar \cdot c}{8\pi \cdot k_B}\right)^4 = 3{,}9631 \cdot 10^{15} \, \frac{\mathrm{kg}^3}{\mathrm{s}}$$

Hvis vi sætter levetiden t_0 til Universets nuværende alder ($t_0 = 13{,}8 \text{ Går} = 13{,}8 \cdot 10^9 \cdot 3{,}1558 \cdot 10^7 \mathrm{s} = 4{,}36 \cdot 10^{17} \mathrm{s}$) så er massen af de sorte huller, der netop nu 'brænder op'

(9) $M_0 = \sqrt[3]{3 \cdot k \cdot t_0} = \sqrt[3]{3 \cdot 3{,}9631 \cdot 10^{15} \cdot 4{,}36 \cdot 10^{17}} \text{ kg} = 1{,}73 \cdot 10^{11} \text{ kg}$

Hvor stor en masse er så det?

Hvis vi ser på en 'terning' med massefylden $\rho = 2{,}6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ (kvarts), så vil kantlængden i terningen være

$$l = \sqrt[3]{\frac{1{,}73 \cdot 10^{11} \text{ kg}}{2{,}6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3}} = 405 \text{ m}$$

Det gamle sorte huls masse er altså det der svarer til massen af en klippe-terning med kantlængde lidt under 0,5 km.

Så enkelt kan det gøres!