

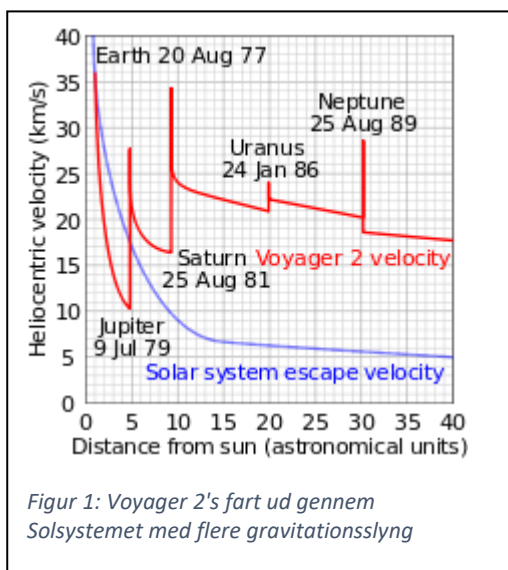
Gravitations-slyng af rumsonde – den fattige mands raket

- fra www.borgeleo.dk

På engelsk: *gravity assist eller gravity slingshot effect*

Ved udsendelsen af rumsonder udnyttes denne metode ofte til at opnå en højere – eller lavere fart for sonden. Når sonden passerer bag om en forbigående planet, vil gravitationskraften fra planeten trække sonden op i fart, samtidig med at sondens bevægelsesretning ændres. Passerer sonden derimod ind foran den forbigående planet, vil sondens fart blive mindre, sondens retning ændres også her.

Som eksempel nævner vi her Voyager 2 sondens rejse ud gennem Solsystemet. Den mindste fart en sonde skal have i Jordens afstand fra Solen for helt at forlade Solsystemet er (i koordinatsystemet hvor Solen er i hvile) 42,2 km/s. Jordens fart i banen om Solen er ca. 30 km/s. Så hvis sonden sendes af sted i Jordens



Figur 1: Voyager 2's fart ud gennem Solsystemet med flere gravitations-slyng

bevægelsesretning skal den mindste fart derfor være 12,2 km/s. Men også Jordens gravitationsfelt skal overvindes, det kræver i sig selv en begyndelsesfart på 11,2 km/s. Så uden at tage hensyn til luftmodstanden fra Jordens atmosfære skal begyndelsesfarten fra Jordan være mindst 23,4 km/s for at forlade Solsystemet. Denne fart er vanskelig at opnå med den nuværende raket teknologi. Derfor er det nødvendigt at bruge muligheden for at bringe sonden op i fart ved hjælp en eller flere gravitations-slyng fra de planeter, der passerer på sondens vej ud af Solsystemet. Voyager 2 sonden udnyttede både Jupiter, Saturn, Uranus og Neptun til gravitations-slyng. Se figur 1.

Vi vil i det følgende se nøjere på, hvordan dette gravitations-slyng sker.

Kinematik – sammenligning af bevægelse i planetcentreret system og heliocentreret system

Vi begynder med at se på hvilken bane en rumsonde følger set fra et system med begyndelsepunkt i planetens centrum med faste akseretninger i forhold til de meget fjerne kvasarer. I første omgang ser vi kun på sondens indkommende og udgående hastighed, altså hastighederne langt fra planeten, fx 1000 planetradier, hvor vi med rimelighed kan se bort fra gravitationskræfter fra planeten. Vi ser i denne sammenhæng bort fra Solens indflydelse på sondens bane, sådan at beskrivelsessystemet er et inertial-system.

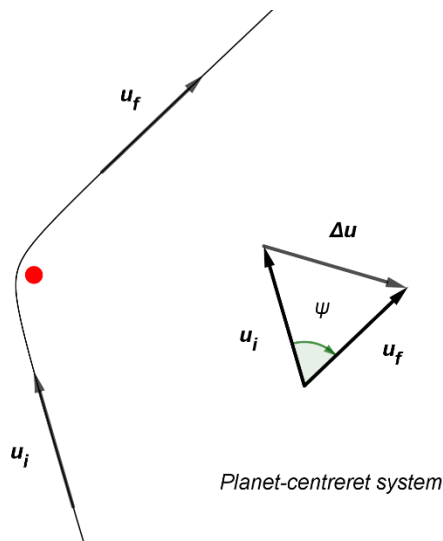
Hvis sondens energi er positiv (relativt til planeten), er banen som måske bekendt en hyperbel med en indkommende asymptote og en udgående asymptote. De asymptotiske hastigheder betegnes med hhv. \mathbf{u}_i og \mathbf{u}_f , se figur 2. Indeks i og f står for *initial* og *final*, altså begyndelse og slut. Størrelsen af disse hastigheder – altså den indkommende og udgående fart – er den samme, og vi betegner denne fart med u .

$$(1) \quad |\mathbf{u}_i| = |\mathbf{u}_f| = u \quad \text{Planetcentreret system - samme fart ind og ud}$$

Derimod er retningerne for de to hastigheder ikke den samme, så der er en hastighedstilvækst:

$$(2) \quad \Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_f - \mathbf{u}_i$$

- se igen figur 2. Drejningsvinklen for hastighedsvektoren betegnes med ψ .

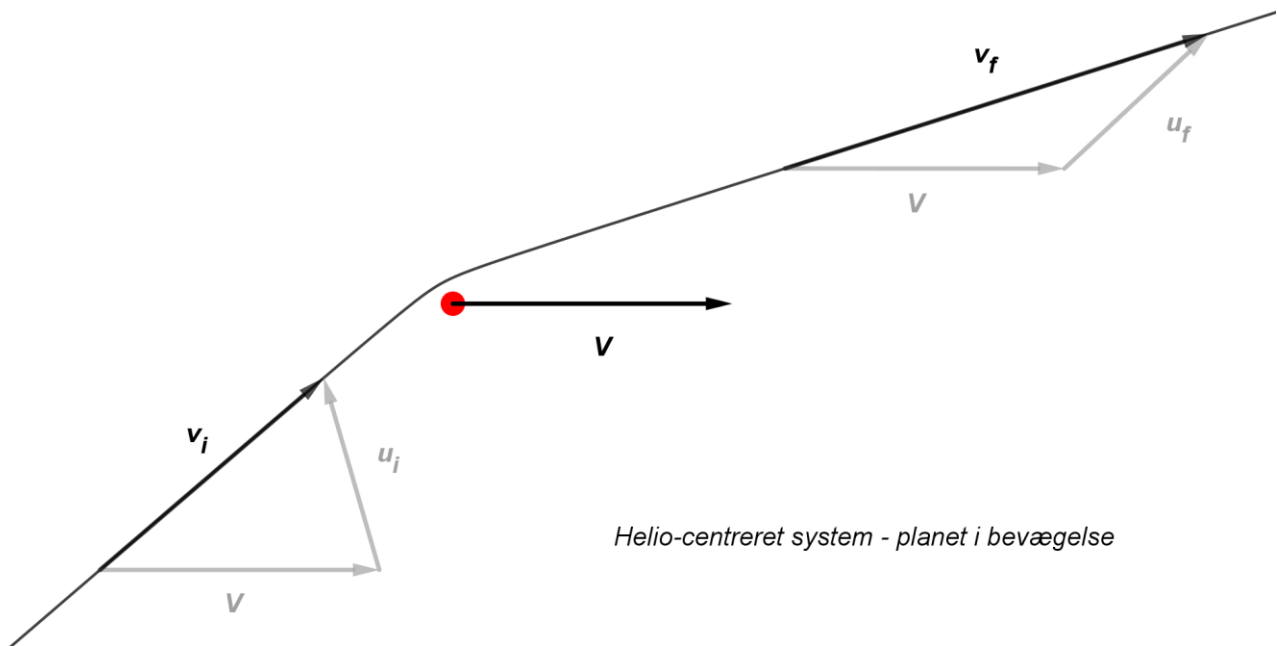


Figur 2: Sondebane, planetcentreret system. Asymptotiske hastigheder er indtegnet – samt tilvæksten i den asymptotiske hastighed

Bedømt fra planetens hvilesystem er der altså *ikke* en gevinst (eller tab) i sondens fart eller kinetiske energi, idet der blot sker en drejning af sondens bevægelses-retning. Men hvordan kan det så lade sig gøre at opnå større eller mindre fart for en sonde ved mødet med en planet?

Svaret er, at forløbet på figur 2 ser ganske anderledes ud set fra et sol- eller helio-centreret system – igen med faste akse-retninger i forhold til de fjerne kvasarer og akser parallelle med det planetcentrerede koordinatsystem. I dette system er planeten i bevægelse og sonden kan derfor passere bag om eller ind foran planeten – og det er netop afgørende for både sondens fart og retning

efter mødet med planeten – set fra det helio-centrerede system. Det vil fremgå af figur 3 nedenfor hvor bevægelserne netop er beskrevet i det helio-centrerede system hvor planeten er i bevægelse.



Figur 3: Heliocentreret system – sonden passerer bag om planeten, bliver trukket op i fart og drejet

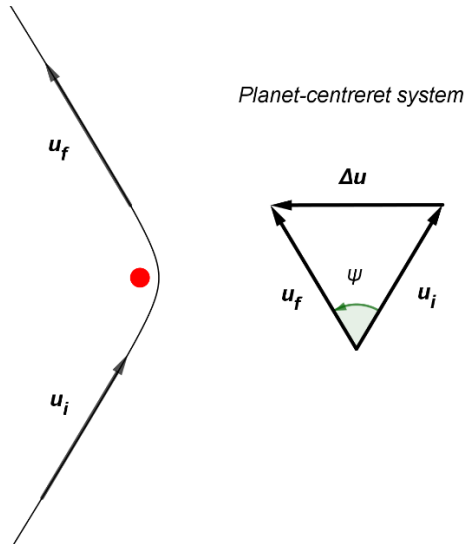
Sondens hastighed i det heliocentrerede system betegner vi med bogstavet v og findes som planethastigheden (medfølgerhastigheden) V plus sondens hastighed i det planetcentrerede system u , hvor hastighederne efter Galilei-transformationen adderes som vektorer, altså

Hastighedsaddition ifølge Galileitransformationen:

$$v_i = V + u_i \quad \text{og} \quad v_f = V + u_f$$

Som det fremgår af figur 3, er resultatet en øget fart for sonden – og en ændret bevægelsesretning.

I det planetcentrerede system var der som nævnt ingen fartgevinst ved planetpassagen.



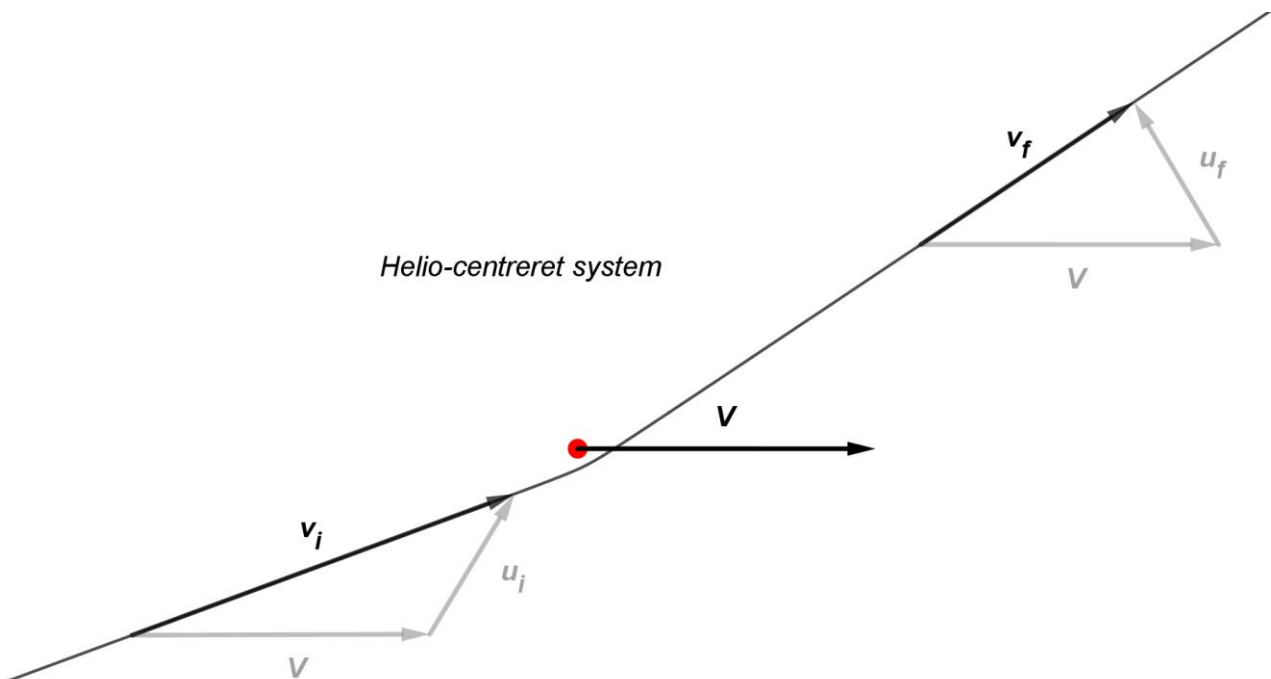
Hvordan ser kinematikken ud hvis sonden passerer ind *foran* planeten i bevægelse? Vi påstod ovenfor, at det ville resultere i en mindre fart for sonden.

Først ser vi på sondens bevægelse bedømt fra det planetcentrerede system, hvor de asymptotiske hastigheder igen betegnes med bogstavet u .

Figur 4 viser – som figur 2 – afbøjningen af sondens bane omkring planeten i det planetcentrerede system. Igen er den samlede drejning af hastighedsvektoren indtegnet og betegnet med bogstavet ψ .

Figur 4: Afbøjning af sondebane set fra det planetcentrerede system

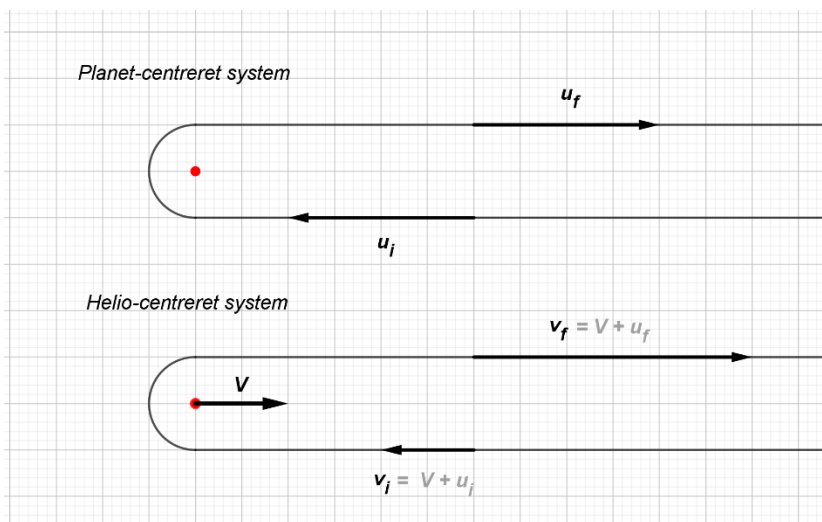
På figur 5 nedenfor – som viser bevægelser i det heliocentriske system – lader vi igen planeten bevæge sig mod højre, således at sonden nu passerer ind *foran* planeten. Sondens har så en medfølgerhastighed (planetens hastighed), sådan at sondens samlede hastighed er (vektor-)summen af planetens hastighed og hastigheden i det planet-centrerede system. Som vist på figur 3.



Figur 5: Heliocentreret system - sonden passerer ind foran planeten og bliver bremset og drejet

Vi kan altså konkludere:

- Når sonden passerer bag om planeten, trækker gravitationskraften fra planeten sonden op i fart (planetens gravitationskraft trækker nogenlunde i sondens bevægelsesretning 'fremad' mens sonden er tæt på planeten)
- Når sonden passerer 'for om' planeten, trækker gravitationskraften fra planeten sonden ned i fart (planetens gravitationskraft trækker nogenlunde baglæns i sonden mens den er tæt på planeten)



Den største tilvækst i fart opnås når sonden bevæger sig modsat planetens hastighedsvektor på vej ind, og ensrettet med planetens hastighedsvektor på vej ud, se fig. 6, hvor planetens indgående og udgående asymptotiske hastighed er indtegnet.

Det fremgår af fig. 6, at sondens fart er

$$v_i = u_i - V$$

og

$$v_f = u_f + V$$

Figur 6: Størst mulig tilvækst i fart i heliocentreret system

Dermed bliver tilvæksten i sondens fart

$$\Delta v = v_f - v_i = 2V$$

da jo $u_f = u_i$.

Den størst mulige tilvækst i sondens fart er altså to gange planetens fart.

Samtidig vendes sondens bevægelses-retning 180° .

De indtegnede sondebaner på fig. 6 er kun illustrative. Banen i det planetcentrerede system burde fx være en parabel.

Fysiske principper bag gravitationsslyng af rumsonde

Der er to grundlæggende fysiske principper bag gravitationsslyng af en rumsonde, nemlig bevarelse af bevægelsesmængde og energi. Vi begynder med bevarelse af bevægelsesmængde.

Bevægelsesmængdebevarelse

Sondens masse betegner vi med m , og planetens masse med M . Sondens asymptotiske hastigheder i det helio-centrerede system betegnes som ovenfor med v_i og v_f , og planetens ditto betegnes tilsvarende med V_i og V_f .

Bevarelse af bevægelsesmængde fortæller os så, at

$$m \cdot \mathbf{v}_i + M \cdot \mathbf{V}_i = m \cdot \mathbf{v}_f + M \cdot \mathbf{V}_f$$

Vi omformer denne ligning til

$$\mathbf{V}_f - \mathbf{V}_i = \frac{m}{M} \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_f)$$

Masseforholdet m/M er i praksis et meget lille tal. Hvis vi fx antager at sondens masse er 10^3 kg, og vi bruger Jorden som planet (masse $5,97 \cdot 10^{24}$ kg), bliver masseforholdet $1,7 \cdot 10^{-22}$. Størrelsen af sondens hastighedsforskel er af størrelsesordenen fx 30 km/s. Derved bliver størrelsen af Jordens hastighedsændring omtrent $5 \cdot 10^{-18}$ m/s – altså en helt ubetydelig hastighedsændring.

Derfor kan vi i denne sammenhæng med stor præcision antage, at $\mathbf{V}_f = \mathbf{V}_i = \mathbf{V}$ - som brugt i forrige afsnit.

Energibevarelse

Processen gravitations-slyng af sonde er grundlæggende et elastisk sammenstød med energi- og bevægelsesmængdebevarelse. Vi kan beskrive dette sammenstød fra begge koordinatsystemer, altså det planetcentrerede system og det helio-centrerede system.

Fra det *planet-centrerede* system er planeten i hvile, og sonden har samme asymptotiske fart på vej ind og ud – som beskrevet i formel (1). Derfor er energien bevaret:

$$(3) \quad \frac{1}{2} m u_i^2 = \frac{1}{2} m u_f^2 \quad \text{fordi } u_i = u_f \quad (\text{hvor } u_i = |\mathbf{u}_i|, u_f = |\mathbf{u}_f|)$$

I det helio-centrerede system har vi også energibevarelse:

$$(4) \quad \frac{1}{2} m v_i^2 + \frac{1}{2} M V_i^2 = \frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{1}{2} M V_f^2$$

hvor $v_i = |\mathbf{v}_i|$, $v_f = |\mathbf{v}_f|$ og $V_i = |\mathbf{V}_i|$, $V_f = |\mathbf{V}_f|$. I formel (4) er der ikke medtaget potentiel energi fordi vi ser på de asymptotiske tilstande, hvor sonden er så fjernt fra planeten, at den potentielle energi er meget lille (strengt taget 0 asymptotisk, men hvis afstanden er fx 1000 planetradier, er gravitationskraften fra planeten næsten uden betydning)

Den tilvækst i kinetisk energi, sonden måtte opnå, sker på bekostning af planetens kinetiske energi. Og omvendt: hvis sonden mister kinetisk energi, opnår planeten en tilsvarende øget bevægelsesenergi. Fartpåvirkningen af planeten er dog så lille, at den næppe kan måles. Jf. bemærkningen under bevægelsesmængdebevarelse.

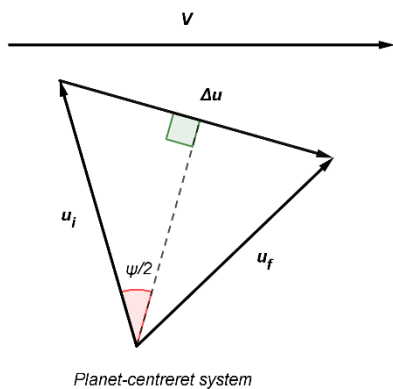
Vi vil her henviser til appendiks 1, hvor konsekvenserne af formel (4) udledes. Resultatet er

$$(5) \quad \Delta E_{kin, sonde} = m \mathbf{V} \cdot \Delta \mathbf{u} = 2mV u_i \cdot \sin(\psi/2) \cdot \cos(\angle(\Delta \mathbf{u}, \mathbf{V}))$$

Vi ser heraf, at sonden vinder mest energi hvis $\psi = 180^\circ$ og $\angle(\Delta \mathbf{u}, \mathbf{V}) = 0^\circ$ svarende til figur 6.

Herved vinder sonden energien

$$(6) \quad \Delta E_{kin, sonde} = 2mVu = \frac{1}{2} m(V + u)^2 - \frac{1}{2} m(V - u)^2 \quad \text{hvor } u = u_i = u_f$$



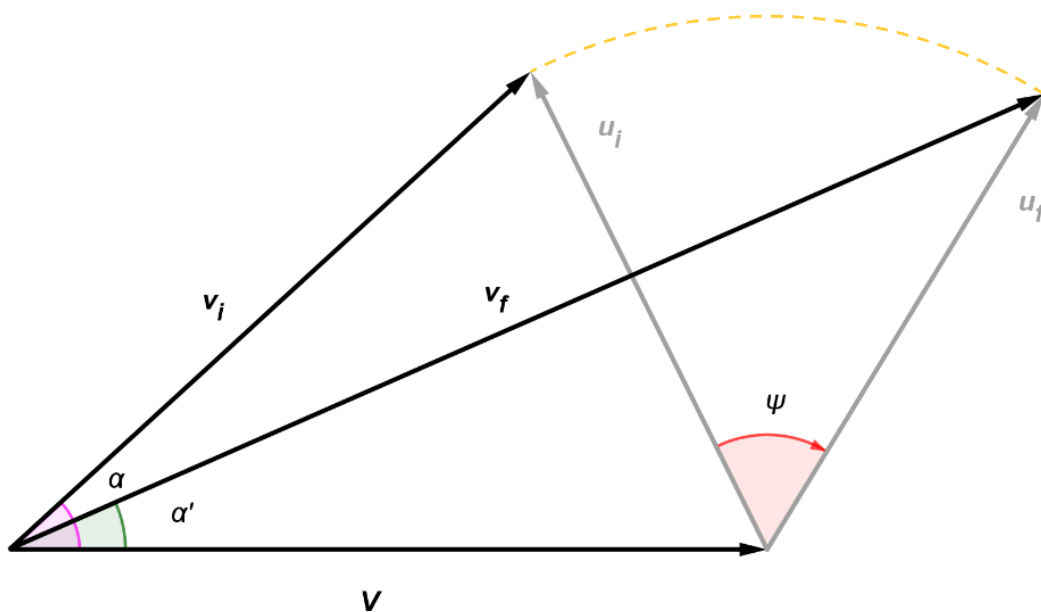
Formel (5) illustreres af figur 7

Figur 7: Hastighedstrekanter fra figur 2 i planetcentreret system

Beregning af sluthastighed og fart for sonde

- med given begyndeshastighed og planethastighed

I praksis er det som oftest ikke muligt at vælge sondens indgangshastighed frit, og det samme gælder planetens hastighed. Derimod er det muligt at justere sondens hastighed en smule så afbøjningsvinklen ψ bliver større eller mindre. Her er det afgørende hvor tæt på planeten sonden passerer. Vi ser derfor på, hvordan afbøjningsvinklen ψ skal vælges, for at opnå det maksimale 'boost' for sonden – hvor den indkommende hastighed v_i og planetens hastighed V er givet.



Figur 8: Hastighedsdiagram - u_i og u_f danner vinklen ψ og v_i og v_f danner vinklerne hhv. α og α' med V

På figur 8 er alle hastigheder indtegnet. Der indlægges et koordinatsystem med 1.-akse i retning af V , og 2. akse 90° opad i positiv omløbsretning. Vi kan så udtrykke sluthastigheden v_f 's koordinater ved v_i , V og afbøjningsvinklen ψ (se appendiks 2 for begrundelse):

1. og 2. koordinat for sluthastigheden:

$$(7) \quad v_{f,1} = v_f \cdot \cos(\alpha') = V(1 - \cos(\psi)) + v_i \cos(\alpha - \psi)$$

$$(8) \quad v_{f,2} = v_f \cdot \sin(\alpha') = V \sin(\psi) + v_i \sin(\alpha - \psi)$$

Vi kan beregne kvadratet på slutfarten vha. (7) og (8), og resultatet er

$$(9) \quad v_f^2 = v_i^2 + 2V\{V(1 - \cos(\psi)) + v_i(\cos(\alpha - \psi) - \cos(\alpha))\}$$

Formel (9) kan i øvrigt også nemt vises ved at benytte cosinusrelationen to gange – og benytte (7) efterfølgende.

Optimalt 'boost' med begyndelsesbetingelser

Skal vi – for given v_i , V – finde det optimale 'boost', skal sondens sluthastighed v_f være ensrettet med planetens hastighedsvektor V .

Det må betyde, at 2. koordinaten for sluthastigheden er 0 (eller at $\alpha' = 0$).

Optimalt 'boost' ifølge formel (8):

$$\alpha' = 0 \text{ hvoraf:} \quad V \sin(\psi) + v_i \sin(\alpha - \psi) = 0$$

Benytter vi så additionsformlen $\sin(x - y) = \sin(x) \cos(y) - \cos(x) \sin(y)$, får vi så

$$V \sin(\psi) + v_i \sin(\alpha) \cos(\psi) - v_i \cos(\alpha) \sin(\psi) = 0$$

Og videre

$$(V - v_i \cos(\alpha)) \sin(\psi) = -v_i \sin(\alpha) \cos(\psi)$$

Og endelig

$$(10) \quad \tan(\psi) = \frac{v_i \sin(\alpha)}{v_i \cos(\alpha) - V} \quad \text{optimal drejningsvinkel, planet-centreret system}$$

Eksempel

Vi antager, at $V = 1$ og at $v_i = 1,5$. Desuden antager vi, at vi nærmer os planetens bane under en vinkel på $\alpha = 40^\circ$.

Vi indsætter i formel (10):

$$\tan(\psi) = \frac{1,5 \sin(40^\circ)}{1,5 \cos(40^\circ) - 1} = 6,47$$

Den optimalt boost-vinkel ψ bliver så $81,2^\circ$.

Slutfarten kan så findes af (7):

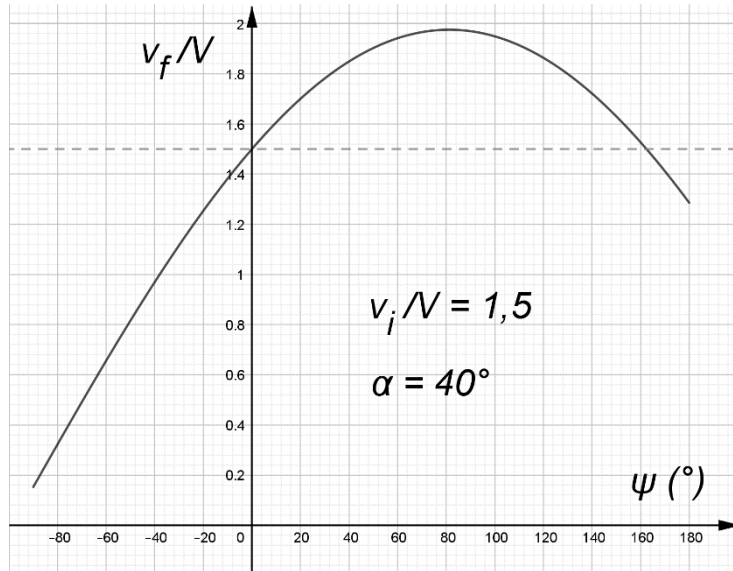
$$v_f = v_f \cdot \cos(0^\circ) = V(1 - \cos(\psi)) + v_i \cos(\alpha - \psi) = 1 \cdot (1 - \cos(81,2^\circ)) + 1,5 \cdot \cos(40^\circ - 81,2^\circ) = 1,98$$

Og da farten før var $v_i = 1,5$, er farten steget med $1,98 - 1,5 = 0,48$. Det er 24% af det maksimale boost på $2V = 2 \cdot 1 = 2$.

Vi kunne også have benyttet formel (9) til beregningen af slutfarten – med samme resultat.

Ikke-optimale 'boosts' med begyndelsesbetingelser – eksempel fortsat

Men hvad med slutfarten hvis sluthastigheden ikke er ensrettet med planetens hastighedsvektor, altså hvis afbøjningsvinklen ψ ikke er $81,2^\circ$? Her må vi bruge formel (9) til beregning af v_f . Resultatet ses på grafen fig. 9.



Figur 9: Slutfart vs afbøjningsvinkel ψ

Grafen viser – som forventet – at v_f formindskes når afbøjningsvinklen afviger fra $81,2^\circ$. Ikke mærkeligt fordi v_f nu ikke længere er ensrettet med V . Men man ser også en symmetri om linjen $\psi = 81,2^\circ$. For en given værdi af v_f er der to afbøjnings-vinkler mulige. Næmlig en mindre vinkel og en større. De to værdier af v_f ligger spejlsymmetrisk om planetens hastighedsvektor V . I praksis vælges ofte den mindre vinkel, fordi sonden så ikke kommer for tæt på planeten, se nedenfor. Gennemsnittet af de to mulige vinkler for et givet boost er altid den optimale vinkel, der giver størst boost.

Ved den dobbelte vinkel af det optimale 'boost', altså ved $162,4^\circ$ - er slutfarten lig begyndelsesfarten. Altså intet boost. Bliver afbøjningsvinklen større end $162,4^\circ$ eller under 0° , mister sonden fart.

Rumsonders baner - set fra planet-centreret system

Keplerbaner – specielt hyperbel-baner

I polære koordinater (r, θ) er en Kepler-bane beskrevet ved formlen

$$(11) \quad r(\theta) = \frac{h^2/GM}{1+\epsilon \cdot \cos(\theta)} \quad \text{hvor} \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{G^2M^2}}$$

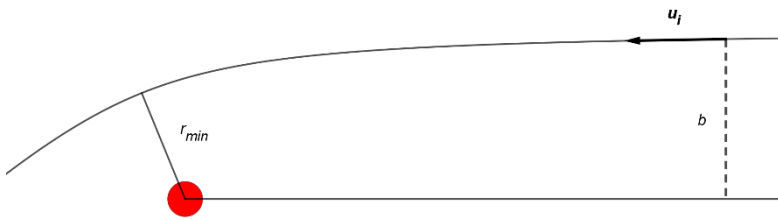
Her er h sondens bevægelsesmængdemoment pr masseenhed, E er sondens energi pr. masseenhed – begge bevægelseskonstanter. M er planetens masse og G er Newtons universelle gravitationskonstant. Banen ligger i det plan, der udspændes af vektorerne V og v_i .

For en hyperbolsk bane er energien $E > 0$, og excentriciteten $\epsilon > 1$. Sondens nærmest planeten når $\theta = 0$, dvs.

$$(12) \quad r_{min} = \frac{h^2/GM}{1+\epsilon}$$

For store afstande fra planeten vil $1 + \epsilon \cdot \cos(\theta)$ nærme sig 0, sådan at θ vil være tæt på de to vinkler $\pm \arccos(-\frac{1}{\epsilon})$. Sondens afbøjningsvinkel vil så være

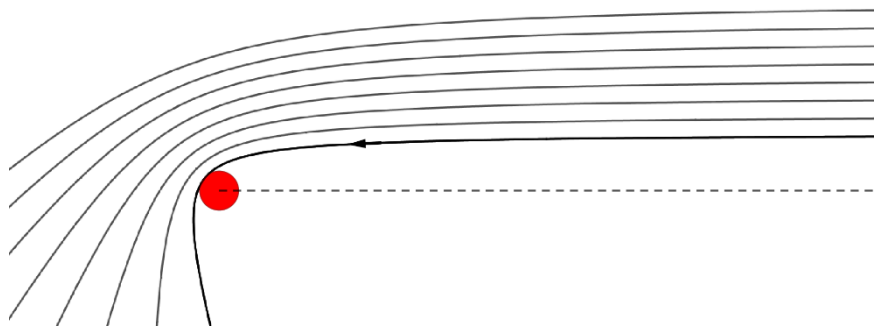
$$(13) \quad \psi = 2 \cdot \arccos\left(-\frac{1}{\epsilon}\right) - \pi$$



Figur 10: Betydningen af r_{min} og indfaldsparameter b

meteren b . Og af formel (12) for r_{min} fremgår det så, at r_{min} også er en voksende funktion af b . Indfaldsparameteren b bestemmer altså (for given indgangsfart u_i) størrelsen af r_{min} . Denne skal naturligvis være større end planetens radius R – ellers 'crasher' sonden.

På fig. 11 ses forskellige hyperbelbaner med mindre og mindre indfaldsparametre b . Det fremgår, at banens afbøjningsvinkel er voksende med faldende værdier af b . Hvis b er for lille vil være katastrofalt for sonden!



Figur 11: Sondebaner med forskellige værdier af indfaldsparameteren b

radius, og u er den asymptotiske fart i det planet-centrerede system som sonden nærmer sig planeten med. Det fremgår af formelen, at en større planetradius kræver en større indfaldsparameter – næppe overraskende. Tilsvarende med en større tyngdeacceleration. Men formelen viser også, at jo langsommere sonden nærmer sig planeten, desto større skal indfaldsparameteren være. Måske heller ikke så overraskende, da en langsommere sonde giver planetens gravitationskraft mere tid til afbøje sondens bane. Som nævnt ovenfor vil der ofte ved ikke-optimerede sondeslyng være to mulige afbøjningsvinkler for et ønsket boost i farten af sonden. Her vælges ofte den, der giver mindst afbøjning – og dermed den fjerneste passage af planeten. Også for at undgå kontakt med en eventuel planetatmosfære, hvor sonden jo kunne brænde op eller i hvert fald miste fart. Det nævnes, at Rosetta sonden i 2007 passerede Mars i en afstand

Når sondens er langt fra planeten (asymptotiske værdier), er $E = \frac{1}{2}u^2$ og $h = b \cdot u$ hvor b er indfaldsparameteren – den afstand den indkommende banes asymptote har til den parallelle linje der peger direkte mod planetens centrum. Se figur 10.

Det fremgår af formel (11) for excentriciteten ϵ at den – for samme asymptotiske fart af sonden – er en voksende funktion af indfaldspara-

Hvad er så den mindste værdi indfaldsparameteren b kan have hvis et crash mod planeten skal forhindres? Betingelsen for at undgå crash må være

$$(14) \quad r_{min} > R$$

Uden at gå i detaljer med udledningen bliver resultatet

$$(15) \quad b > R \sqrt{1 + \frac{2gR}{u^2}}$$

Her er g tyngdeaccelerationen på planetens overflade – se (16) nedenfor, R er planetens

på blot 250 km på sin vej mod kometen 67P/Churyumov-Gerasimenko. En temmelig risikabel manøvre der gik godt.

$$(16) \quad g = G \frac{M}{R^2}$$

Tyngdeacceleration på planetoverflade

Referencer

- 1) The slingshot effect, R. C. Johnson, January 2003, <http://maths.dur.ac.uk/~dma0rcj/Psling/sling.pdf> - besøgt d. 9. april 2021
- 2) Formler for v_f 's koordinater: <https://math.stackexchange.com/questions/2658964/deriving-the-formula-for-velocities-of-gravitational-slingshots-using-trigonomet> - besøgt d. 9. april 2021
- 3) Rosetta-missionen https://www.esa.int/ESA_Multimedia/Videos/2013/10/Rosetta_s_twelve-year_journey_in_space - videoanimation med sondens bane gennem 12 år – besøgt 30. maj 2021

Opgave 1 – crash eller ikke

En rumsonde skal udnytte en forbi-flyvning af planeten Jorden til at opnå en større fart. Sondens fart er i det helio-centrerede system $v_i = 32$ km/s i stor afstand af Jorden. Sondens bevægelsesretning i det helio-centrerede system er $\alpha = 20^\circ$ i forhold til Jordens bevægelse, se evt. figur 8 i artiklen. Jorden bevæger sig med farten $V = 30,0$ km/s i sin bane om Solen.

- a) Beregn sondens fart u_i i det jord-centrerede system

Vi ønsker os et boost i fart på 4,0 km/s når sonden har passeret Jorden, set fra det helio-centrerede system.

- b) Beregn sondens slutfart i dette system
c) Find de to mulige afbøjningsvinkler ψ i det jordcentrerede system. Brug evt. solver med begrænsningen at den ubekendte skal ligge mellem 0 og π .
d) Beregn på denne baggrund de to mulige excentriciteter ε for sondens mulige baner. Brug og begrund hertil formelen $\sin\left(\frac{\psi}{2}\right) = \frac{1}{\varepsilon}$.

Af formel (11) for ε kan vi isolere indfaldsparameteren delt med R , altså b/R (når vi sætter $h = u \cdot b$ og $E = \frac{1}{2}u^2$):

$$\frac{b}{R} = \frac{gR}{u^2} \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$$

hvor vi samtidig har udnyttet sammenhængen $g = G \frac{M}{R^2}$ for Jordens tyngdeacceleration ved overfladen.

- e) Brug formelen for b/R ovenfor på de to mulige baner og sammenlign med kravet $\frac{b}{R} > \sqrt{1 + \frac{2gR}{u^2}}$. Er begge baner mulige i virkelighedens verden??

Formlen for $\frac{r_{min}}{R}$ fra afsnittet om 'Rumsonders baner - set fra planet-centreret system' kan omformes til

$$\frac{r_{min}}{R} = \frac{gR}{u^2} (\varepsilon - 1)$$

hvor vi i omformningen har brugt formelen for excentriciteten og formelen for tyngdeaccelerationen på planetens overflade.

- f) Brug formelen ovenfor til at beregne $\frac{r_{min}}{R}$ for begge baner. Kan begge baner bruges i praksis?
g) Beregn for begge baner koordinaterne for sluthastigheden (som så nok ikke vil være realiseret for den ene bane!). Hvordan ligger de to baner i forhold til planetens hastighedsvektor?
h) Er banen for det optimale boost mulig? (hvor sluthastigheden i heliocentriske koordinater er ensrettet med Jordens hastighed). Eller vil sonden 'crashe' hvis den følger denne bane?

Appendiks 1 – energibevarelse i det helio-centrerede system

Fra det *helio-centrerede* system har vi også energibevarelse:

$$\text{Ap1}_1 \quad \frac{1}{2}mv_i^2 + \frac{1}{2}MV_i^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}MV_f^2$$

hvor $v_i = |\mathbf{v}_i|$, $v_f = |\mathbf{v}_f|$ og $V_i = |\mathbf{V}_i|$, $V_f = |\mathbf{V}_f|$. M er massen af planeten og m er massen af sonden. I formel Ap1_1 er der ikke medtaget potentiel energi fordi vi ser på de asymptotiske tilstande.

I formel Ap1_1 vil vi udnytte sammenhængene

$$\text{Ap1}_2 \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{V}_i + \mathbf{u}_i \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_f = \mathbf{V}_f + \mathbf{u}_f$$

Der er en følge af Galileitransformationen. Af Ap1_2 følger dels, at

$$\text{Ap1}_3 \quad \mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i = \mathbf{u}_f - \mathbf{u}_i \qquad - \text{ med stor præcision } (\mathbf{V}_f \text{ er meget tæt på } \mathbf{V}_i)$$

og

$$\text{Ap1}_4 \quad v_i^2 = \mathbf{v}_i^2 = (\mathbf{V}_i + \mathbf{u}_i)^2 = \mathbf{V}_i^2 + \mathbf{u}_i^2 + 2\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{V}_i = V_i^2 + u_i^2 + 2\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{V}_i$$

$$\text{Ap1}_5 \quad v_f^2 = \mathbf{v}_f^2 = (\mathbf{V}_f + \mathbf{u}_f)^2 = \mathbf{V}_f^2 + \mathbf{u}_f^2 + 2\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{V}_f = V_f^2 + u_f^2 + 2\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{V}_f$$

Vi indsætter Ap1_4 og Ap1_5 i energibevarelsesligningen Ap1_1:

$$\text{Ap1}_6 \quad \frac{1}{2}m(V_i^2 + u_i^2 + 2\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{V}_i) + \frac{1}{2}MV_i^2 = \frac{1}{2}m(V_f^2 + u_f^2 + 2\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{V}_f) + \frac{1}{2}MV_f^2$$

I denne formel vil vi udnytte, at $u_i^2 = u_f^2$, og at $\frac{1}{2}mV_i^2 \approx \frac{1}{2}mV_f^2$, idet vi går ud fra, at sondemassen er langt mindre end planetmassen. Herved omformes formel Ap1_1 til

$$\text{Ap1}_7 \quad m\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{V}_i + \frac{1}{2}MV_i^2 = m\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{V}_f + \frac{1}{2}MV_f^2$$

Planetens tab i energi kan herved udtrykkes på følgende måde:

$$\text{Ap1}_8 \quad \frac{1}{2}MV_i^2 - \frac{1}{2}MV_f^2 = m\mathbf{u}_f \cdot \mathbf{V}_f - m\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{V}_i$$

Vi erstatter i denne formel \mathbf{V}_i og \mathbf{V}_f med \mathbf{V} :

$$\text{Ap1}_9 \quad \frac{1}{2}MV_i^2 - \frac{1}{2}MV_f^2 = m\mathbf{V} \cdot (\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_i)$$

Endelig udnytter vi Ap1_3 og får:

$$\text{Ap1}_{10} \quad \frac{1}{2}MV_i^2 - \frac{1}{2}MV_f^2 = m\mathbf{V} \cdot (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i)$$

Og da planetens tab i kinetisk energi er identisk med sondens gevinst i kinetisk energi, har vi de to formler

$$\text{Ap1}_{11} \quad \Delta E_{kin, sonde} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = m\mathbf{V} \cdot (\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_i)$$

$$\text{Ap1}_{12} \quad \Delta E_{kin, sonde} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = m\mathbf{V} \cdot (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i)$$

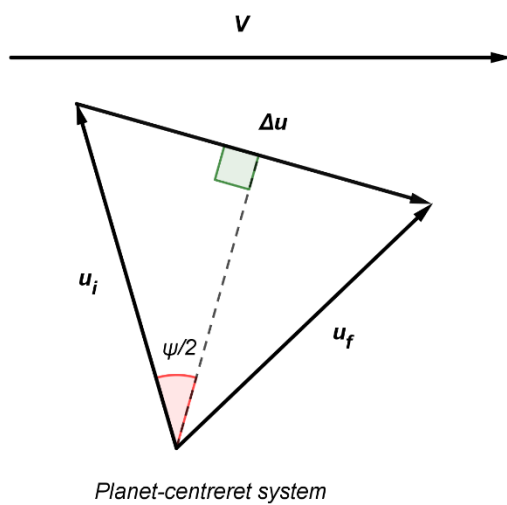
Vi ser af disse formler, at skal sonden vinde mest mulig kinetisk energi, skal skalarproduktet $\mathbf{V} \cdot (\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_i)$ være positivt og størst mulig, dvs. at vektoren $\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_i$ (eller $\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i$) skal være ensrettet med planetens hastighedsvektor \mathbf{V} - og forskellen på hastighedsvektorerne skal være størst mulig. Modsat hvis sonden skal

tabe mest mulig energi, skal skalarproduktet $\mathbf{V} \cdot (\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_i)$ (eller $\mathbf{V} \cdot (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i)$) være negativt og mindst mulig. Dvs. at vektoren $\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_i$ (eller $\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i$) skal være modsat rettet med planetens hastighedsvektor \mathbf{V} . Og igen skal forskellen på de to hastighedsvektorer være størst mulig.

På figur 2 og 3 i artiklen ovenfor kan vi se, at dette gravitationsslyng ikke giver det største 'boost' til sonden, da vektoren $\Delta\mathbf{u} = \mathbf{u}_f - \mathbf{u}_i$ ikke er (helt) ensrettet med planetens hastighedsvektor. Og at forskellen på de to hastighedsvektorer er ikke maksimal.

På figur 4 og 5 ser vi tilsvarende, at vektoren $\Delta\mathbf{u} = \mathbf{u}_f - \mathbf{u}_i$ er modsat rettet med planetens hastighedsvektor. Dermed opnår sonden et større tab i kinetisk energi (og dermed fart), og planeten vinder kinetisk energi.

Hastighedstrekanten fra fig.2 i artiklen ovenfor er vist igen på fig. A nedenfor.



Trekanten er ligebenet, fordi $u_i = u_f$, hvor $u_i = |\mathbf{u}_i|$, $u_f = |\mathbf{u}_f|$. Den stiplede vinkelhalveringslinje danner derfor en ret vinkel med $\Delta\mathbf{u}$ -vektoren. Den retvinklede trekant giver så

$$u_i \cdot \sin(\psi/2) = |\Delta\mathbf{u}|/2$$

hvoraf

$$|\Delta\mathbf{u}| = 2u_i \cdot \sin(\psi/2)$$

Indsættes dette udtryk i formel (11) får vi

Figur A: Hastighedstrekant i det planetcentrerede system

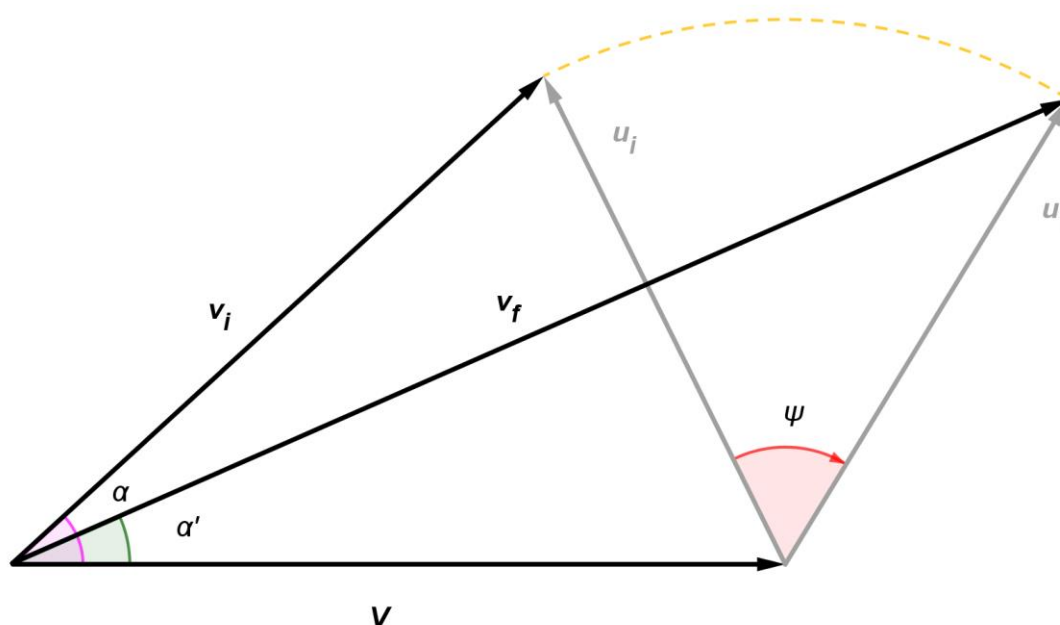
$$\text{Ap1}_{13} \quad \Delta E_{kin, \text{sonde}} = m\mathbf{V} \cdot \Delta\mathbf{u} = 2mVu_i \cdot \sin(\psi/2) \cdot \cos(\angle(\Delta\mathbf{u}, \mathbf{V}))$$

Udtrykker vi den kinetiske energi ved masse og fart, finder vi heraf relationen

$$\text{Ap1}_{14} \quad v_f^2 - v_i^2 = 2\mathbf{V} \cdot \Delta\mathbf{u} = 4Vu_i \cdot \sin(\psi/2) \cdot \cos(\angle(\Delta\mathbf{u}, \mathbf{V}))$$

Appendiks 2 – formler for \mathbf{v}_f 's koordinater givet \mathbf{v}_i 's og \mathbf{V} 's koordinater

Betragt figuren nedenfor. Vi indlægger et koordinatsystem med 1.-akse i retning af planetens hastighedsvektor \mathbf{V} og 2.-akse drejet $+90^\circ$ i positiv omløbsretning relativt til 1.-aksen. Vektorerne \mathbf{v}_i og \mathbf{v}_f danner vinklerne hhv. α og α' med 1. aksen.



Figur B: Hastighedsdiagram for sonde-slyng

Herved bliver koordinaterne for \mathbf{v}_i , \mathbf{v}_f og \mathbf{V} følgende:

$$\mathbf{v}_i = \begin{pmatrix} v_i \cdot \cos(\alpha) \\ v_i \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_f = \begin{pmatrix} v_f \cdot \cos(\alpha') \\ v_f \cdot \sin(\alpha') \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vi skal nu rotere vektoren $\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{V}$ vinklen ψ i negativ omløbsretning over i vektoren $\mathbf{u}_f = \mathbf{v}_f - \mathbf{V}$, se figur B ovenfor. Det gør vi ved at gange med rotationsmatricen $R(-\psi)$, der roterer en vektor vinklen ψ i negativ omløbsretning:

$$R(-\psi) = \begin{pmatrix} \cos(-\psi) & -\sin(-\psi) \\ \sin(-\psi) & \cos(-\psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_f - \mathbf{V} = R(-\psi) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{V})$$

Eller i koordinater:

$$\begin{pmatrix} v_f \cdot \cos(\alpha') - V \\ v_f \cdot \sin(\alpha') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_i \cdot \cos(\alpha) - V \\ v_i \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

Vi ganger højresiden ud og resultatet er:

$$\begin{pmatrix} v_f \cdot \cos(\alpha') - V \\ v_f \cdot \sin(\alpha') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -V \cos(\psi) + v_i(\cos(\alpha) \cos(\psi) + \sin(\alpha) \sin(\psi)) \\ V \sin(\psi) + v_i(\sin(\alpha) \cos(\psi) - \cos(\alpha) \sin(\psi)) \end{pmatrix}$$

Ved brug af additionsformlerne

$$\cos(x - y) = \cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y)$$

og

$$\sin(x - y) = \sin(x) \cos(y) - \cos(x) \sin(y)$$

finder vi så:

$$\begin{pmatrix} v_f \cdot \cos(\alpha') - V \\ v_f \cdot \sin(\alpha') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -V \cos(\psi) + v_i \cos(\alpha - \psi) \\ V \sin(\psi) + v_i \sin(\alpha - \psi) \end{pmatrix}$$

Hermed har vi argumenteret de to formler

$$(i) \quad v_f \cdot \cos(\alpha') = V(1 - \cos(\psi)) + v_i \cos(\alpha - \psi)$$

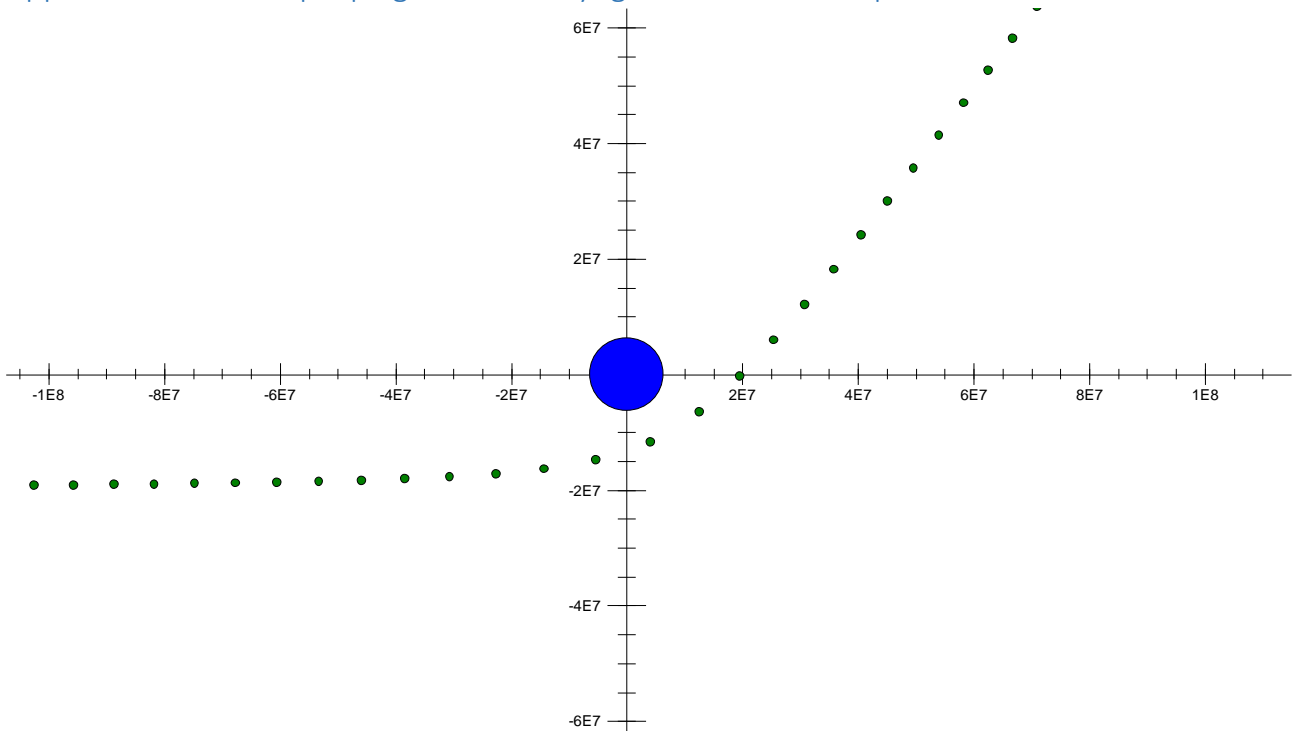
$$(ii) \quad v_f \cdot \sin(\alpha') = V \sin(\psi) + v_i \sin(\alpha - \psi)$$

Koordinaterne for sluthastigheden i det heliocentriske system er givet ved ligningerne (i) og (ii). Slutfarten v_f kan naturligvis nemt findes herfra. Resultatet er

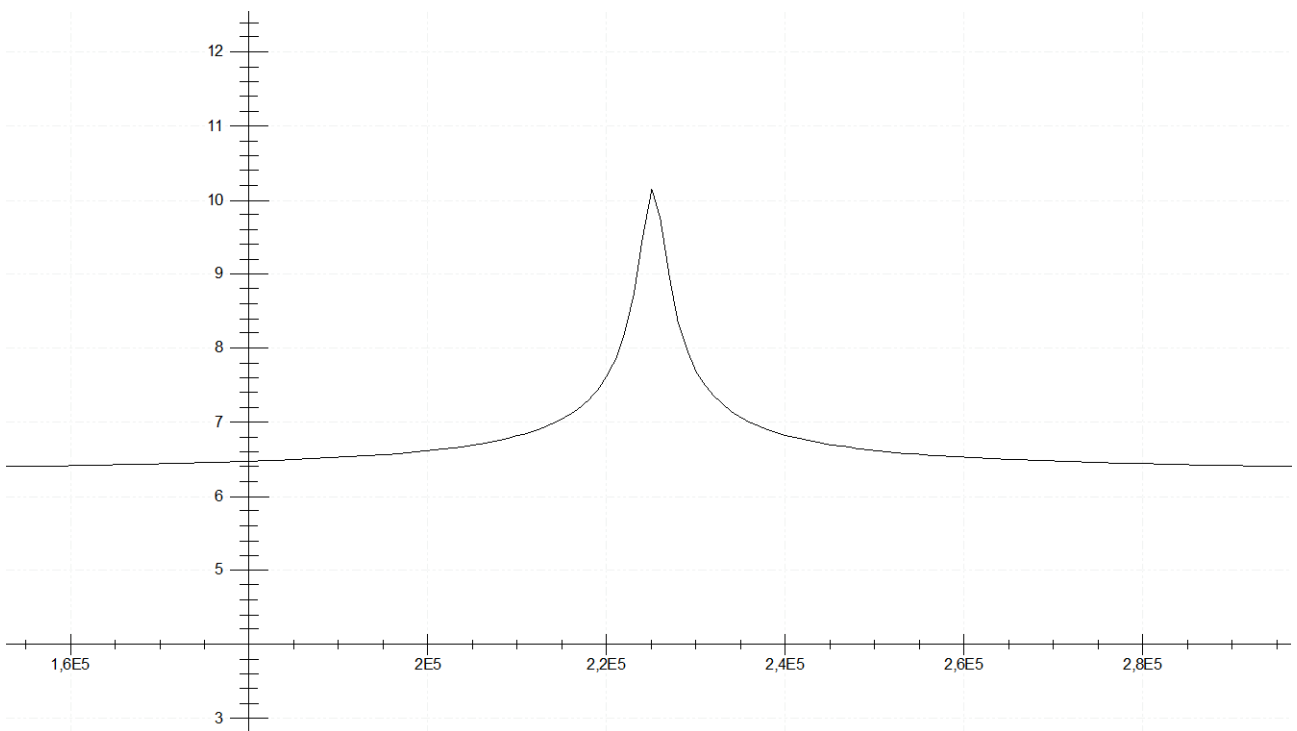
$$(iii) \quad v_f^2 = v_i^2 + 2V\{V(1 - \cos(\psi)) + v_i(\cos(\alpha - \psi) - \cos(\alpha))\}$$

Det kan også nemt vises ved gentagen anvendelse af cosinusrelationen og efterfølgende brug af formel (i) ovenfor.

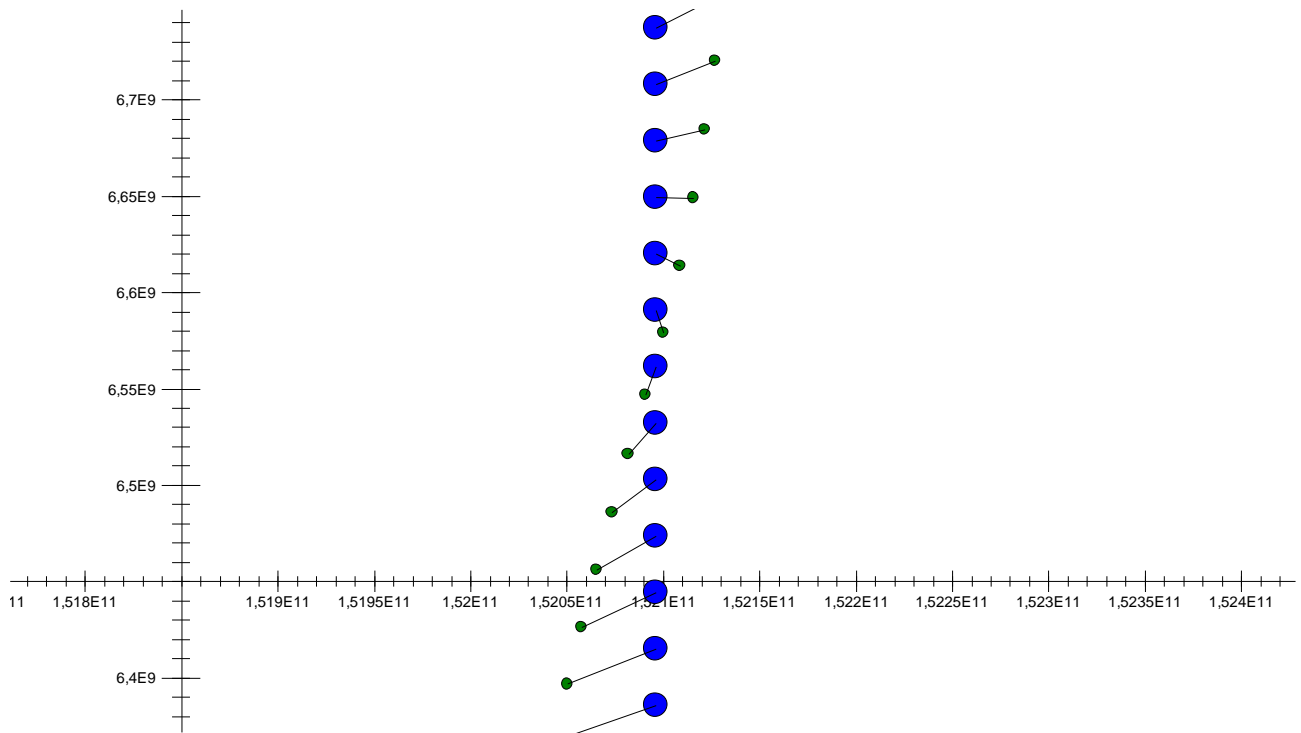
Appendiks 3 – eksempel på gravitationsslyng med Jorden som planet



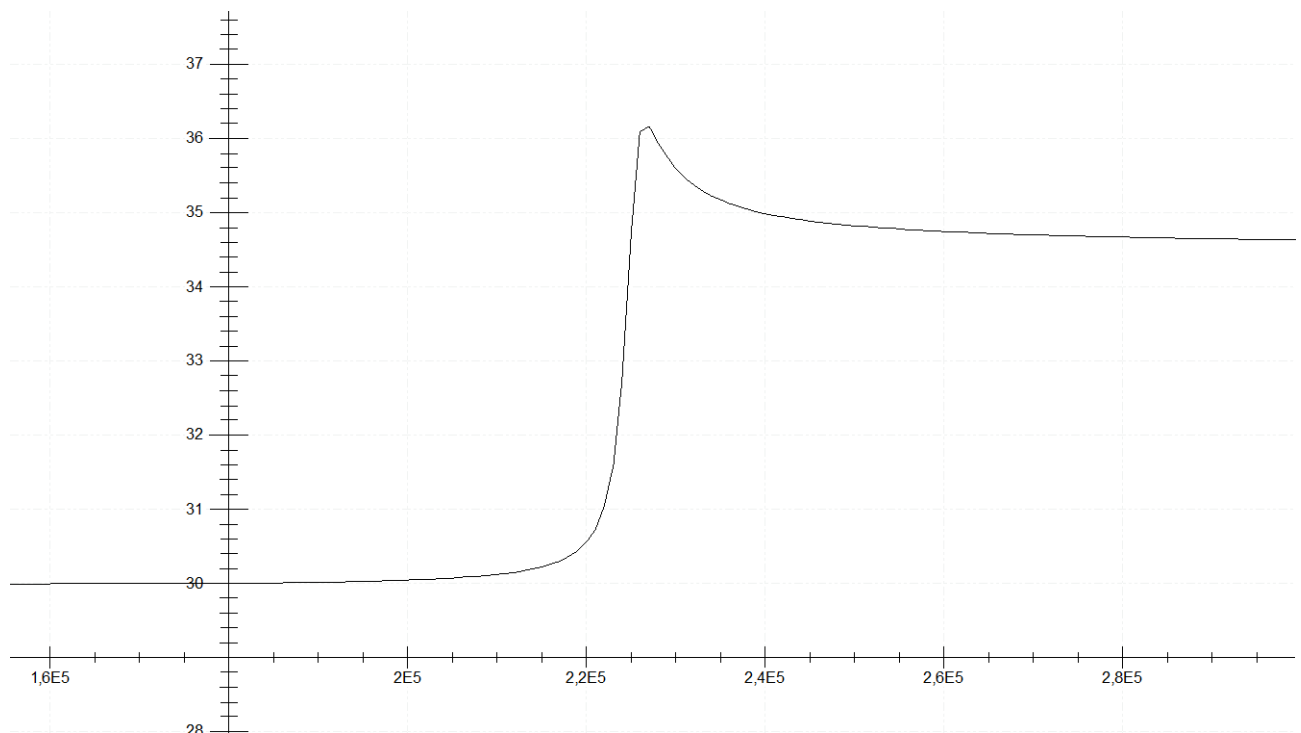
Figur P1: Planetcentreret system – sonden fra venstre afbøjes af Jorden, indfaldsparameter er 20 000 km og asymptotisk fart 6,3 km/s. 1. og 2. akse er planetcentrerede koordinater i meter. Solens indflydelse på bevægelser ikke medtaget.



Figur P2: Planetcentreret system – (t,v) graf for sonde. På 1. akse tid i sekunder, på 2. akse sondens fart i km/s. Samme bane som på fig. P1. Når sonden er tættest på Jorden er farten størst ca. 10 km/s, ellers nærmer farten sig den asymptotiske værdi 6,3 km/s.



Figur S1: Samme bane som ovenfor – men nu set fra heliocentreret system – sonden passerer bag om planeten og slynges op i fart. Planetens fart er 29,3 km/s. Voksende tid nedefra og op. Der er 1000 s mellem øjebliksbillederne. Linjen der forbinder sonden med jordcentret giver retningen af Jordens gravitationskraft på sonden. 1. og 2. akse er Sol-koordinater i meter.



Figur S2: Heliocentreret system – (t,v) graf for sonde for banen ovenfor. 1. akse med tid i sekunder, 2. akse fart i km/s. Farten vokser fra ca. 30 km/s til ca. 36 km/s når sonden er tættest på Jorden og falder så til ca. 34,6 km/s. Altså en fartgevinst på ca. 4,6 km/s fra start til slut.