

# Gravitations-linser

- eller hvordan naturens linser kan forstærke vore egne kikkerter/teleskoper
- fra [www.borgeleo.dk](http://www.borgeleo.dk)

## Indhold

Indledning – hvad er gravitations-linser? .....	1
Eksempel 1 – maksimal afbøjningsvinkel ved Solens rand.....	2
Tynd linse-approksimation .....	4
Afstande og små vinkler – parsec og parallakse.....	4
Einstein-ringe: Einstein-vinkel og Einstein-radius .....	8
Linseformlen .....	9
Svag og stærk linsepåvirkning .....	11
Lysstyrken af de to billeder - forstærkningsfaktor .....	11
Mikrolinse-begivenheder .....	13
Beregningseksempel: mikro-linser og størrelse af Einstein-ring.....	16
Opløsning af de to billeder i en mikrolinse med interferometri .....	17
Måling af to lyskurver for linsebegivenhed til bestemmelse af mikrolinse-parallakse.....	19
Første isolerede sorte hul i Mælkevejen opdaget 2022.....	21
Einsteinring og massen af en tung galakse – kosmologiske afstande .....	23
Mere komplicerede gravitationslinser .....	25
Opgave 1 – Estimat af massen af linsen MACHO-objekt 118.18797.1397.....	25
Referencer: .....	26

## Indledning – hvad er gravitations-linser?

Vi ser i det følgende på hvordan gravitationsfelter påvirker lysstråler, der passerer gennem (ind og ud af) felterne. Specielt vil vi koncentrere os om lysstråler, der passerer gennem relativt svage gravitationsfelter, hvor afbøjningsvinklerne er små. Som vi skal se, virker gravitationsfeltet som en linse, der fokuserer og forøger lysstyrken fra det lysende baggrundsobjekt, uden at ændre på overflade-lystyrken.

Studiet af gravitations-linsede objekter giver ikke bare mulighed for at studere objekter (kilder), der er for lyssvage til at kunne observeres uden linseforstærkning, men giver også muligheden for at bestemme massen af linse-objektet og sammenligne denne masse med massen af stjernerne/galakserne i linsen – og derved afsløre mængden af det såkaldte mørke stof, der typisk udgør størstedelen af linsens masse når det drejer sig om galakser eller galaksehobe. Når kilden er en galakse eller stjerne i det tidlige Univers, giver det fx muligheden for at studere stjerne/galaksedannelse på et tidspunkt hvor de tungere grundstoffer ikke er til stede da de først dannes i senere stjernegenerationer og returneres til rummet via supernova-ekspllosioner.

Vi lægger ud med formlen for afbøjningen af lys (eller gravitationsbølger!) i et gravitationsfelt der er frembragt af et legeme, der kan anses for punktformigt (det gælder for alle sfæriske legemer, da gravitationsfeltet uden for dette er det samme som hvis hele legemets masse er samlet i centrum). På figur 1 ses eksempelvis afbøjningen af stjernernes lys i Solens gravitationsfelt. Det fremgår af figuren, at stjernerne tilsyneladende flytter sig bort fra Solens centrum – og effekten er større jo tættere på Solen de befinder sig. Vi anfører her – uden begrundelse – størrelsen af den vinkel, stjernens lys afbøjes.

$$(1) \quad \alpha = \frac{4GM}{c^2 b} \quad \text{afbøjningsvinkel for lys, svage tyngdefelter}$$

Her er  $G$  Newtons gravitationskonstant,  $M$  er massen af objektet, der afbøjer lyset,  $c$  er lysets fart i vacuum og endelig er  $b$  indfaldsparameteren for stjernelyset i forhold til det afbøjende legemes centrum.

Afbøjningsvinklen er således proportional med massen af det afbøjende objekt, og omvendt proportional med indfaldsparameteren for stjernelyset.

### Eksempel 1 – maksimal afbøjningsvinkel ved Solens rand

Vi giver her et eksempel, der historisk blev vigtigt for accepten af Einsteins almene relativitetsteori, nemlig afbøjningen af stjernelys i Solens tyngdefelt.

Vi vil beregne afbøjningsvinklen for stjernelys, der passerer tæt forbi Solens rand, derfor erstatter vi størrelsen  $b$  med Solens radius, nemlig 696 000 km. Solens masse er  $M_{\odot} = 1,989 \cdot 10^{30}$  kg. Derfor bliver stjernelysets maksimale afbøjning i gravitationsfeltet omkring Solen (her er anvendt SI-enheder):

$$(2) \quad \alpha = \frac{4GM}{c^2 b} = \frac{4 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,989 \cdot 10^{30}}{(3,00 \cdot 10^8)^2 \cdot 6,96 \cdot 10^8} = 8,47 \cdot 10^{-6} \quad \text{maksimal afbøjningsvinkel, Solen}$$

*Øvelse 1 – tjek SI-enhederne i denne beregning!*

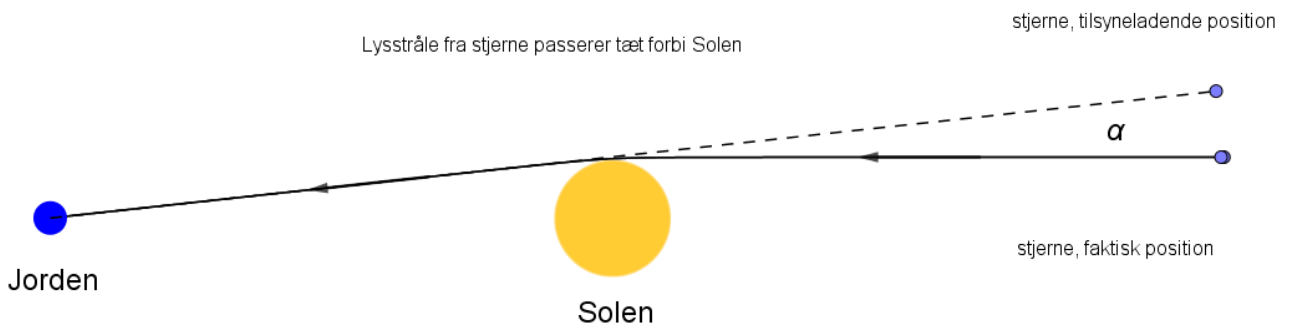
Omregner vi dette tal fra radianer til buesekunder, er resultatet

$$(3) \quad \alpha = 1,75'' \quad \text{maksimal afbøjningsvinkel ved Solens rand}$$

*Øvelse 2 – lav selv omregningen til buesekunder!*

*Øvelse 3 – Månens afbøjning af stjernelys*

Månens masse er  $7,32 \cdot 10^{22}$  kg, og Månens radius er 1738 km. Beregn Månens maksimale afbøjning af stjernelys, dels i radianer, og dels i buesekunder ( $1^\circ = 3600''$ ).



Figur 1: Solens gravitationsfelt bøjer lysstrålerne fra den fjerne stjerne. Størrelsen af afbøjningen er stærkt overdrevet på figuren.

Som nogle måske har bemærket, kan afbøjningsvinklen (1) også udtrykkes ved den såkaldte Schwarzschild-radius for det afbøjende objekt:

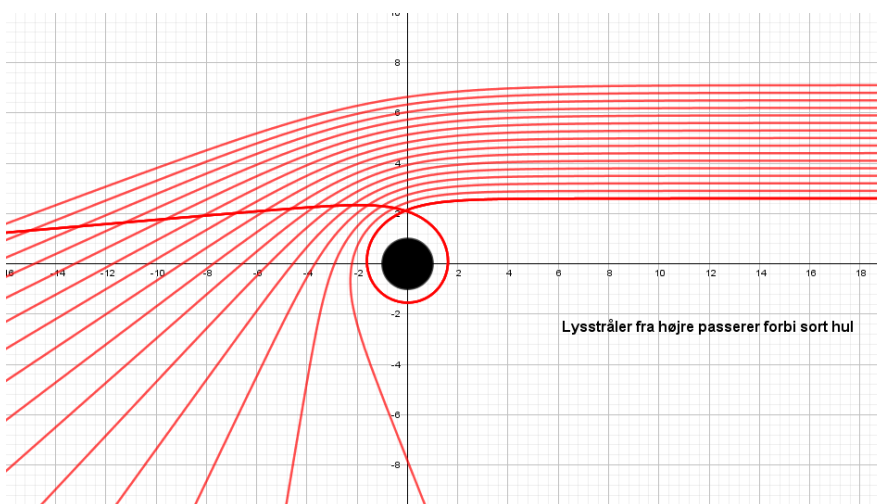
$$R_{Sch} = \frac{2GM}{c^2} \quad \text{Schwarzschild-radius for det afbøjende objekt/linse}$$

Herved bliver afbøjningsvinklen  $\alpha$  givet ved formlen

$$(1a) \quad \alpha = \frac{4GM}{c^2 b} = \frac{2R_{Sch}}{b} \quad \text{afbøjningsvinkel udtrykt ved Schwarzschild-radius}$$

Øvelse 3 – vis, at Schwarzschildradius for Solen er 2,95 km og brug den til beregningen af den maksimale afbøjningsvinkel ved Solens rand.

Formel (1a) antyder også, hvilke objekter der kan give de største afbøjningsvinkler – nemlig de såkaldte sorte huller med tilhørende Schwarzschild-radius. Faktisk er der ingen grænse for afbøjningsvinklen i dette tilfælde hvis lyset passerer tilstrækkeligt tæt forbi det sorte hul, se figur 2.



Figur 2: Lysstrålers afbøjning ved et sort hul - afbøjningsvinklen kan blive vilkårlig stor. Længdeenheden er Schwarzschild-radius. Banerne er beregnet i gravitationsfeltet omkring et ikke-roterende sort hul. Er du interesseret i hvordan disse beregninger laves, kan du fx se ref. 7. Det er samme teori, der for svage gravitationsfelter giver resultatet vist i formel (1)

Men de store afbøjningsvinkler vist på figur 2 er ikke vores hovedærinde her. Måske bortset fra, at lysstrålen med den mindste indfaldsparameter for den fjerne iagttagere ikke vil være afbøjet ret meget i forhold til den indkommende retning. Iagttageren vil ikke kunne se, at den har været en tur rundt om det sorte hul! Dette vil give anledning til relativistiske afbøjninger ved (tilsyneladende) mindre afbøjningsvinkler end givet ved formel (1) tættere på det sorte hul og vil teste det voldsomt stærke tyngdefelt tæt på hullet.

Formlen (1) er afledt af den generelle relativitetsteori der blev udformet af den tyske teoretiske fysiker Albert Einstein (1879 - 1955) i året 1915, og den blev efterprøvet under en total Solformørkelse i 1919 i Afrika. Målingen af denne afbøjning af stjernelyset blev udført af Sir Arthur Eddington, engelsk astronom og astrofysiker. Målingerne var den første eksperimentelle bekræftelse af Einsteins generelle relativitetsteori.

### Tynd linse-approximation

Lyset fra en fjern stjerne eller galakse afbøjes af alle masser, som lyset fra denne kilde passerer på den lange vej fra kilde til observatør. Vi vil her begrænse os til de tilfælde, hvor der kun er en 'linse' eller afbøjende objekt, der påvirker lyset på vejen, med en nogenlunde veldefineret afstand fra os observatører. Linsens udstrækning antages lille sammenlignet med afstanden fra observatør til linse, og lille sammenlignet med afstanden fra kilde til linse.

Ved beregninger af afbøjningsvinklerne projiceres linse-objekternes densiteter ind på linseplanen, der er vinkelret på synslinjen fra observatør til linse og har origo centralt i linsen. Ud fra gravitationsfeltet fra de projicerede densiteter kan afbøjningsvinklerne beregnes. Omvendt bruges målte afbøjningsvinkler til modelberegninger af den projicerede densitet i området omkring linsen.

Denne approksimation betegnes *den tynde linse-approximation*.

I vore beregninger nedenfor kan linsen betegnes som punktformig – selv om det måske er en større galakse! Det er den mest simple linsemodel.

Afbøjningsvinklerne er i alle tilfælde små, af størrelsesordenen få buesekunder eller mindre.

Betegnelsen linse kommer af, at afbøjningen kan beskrives ved at tilskrive rummet omkring linse-objektet med et brydningsindeks  $n$  givet ved

$$(3) \quad n = 1 + \frac{2GM}{rc^2} \quad \text{'brydningsindeks' af rummet omkring linsen for punktmasse}$$

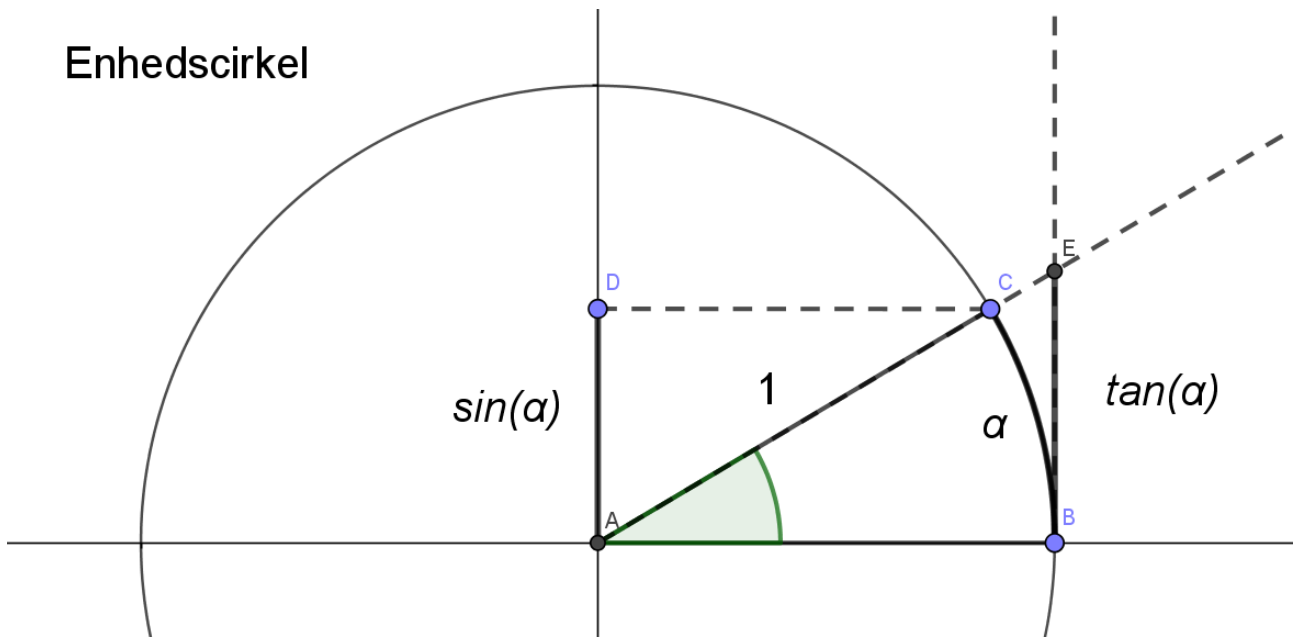
hvor  $M$  er massen af linse-objektet, og  $r$  er afstanden til linse-objektet. Dette er et alternativ til at beskrive afbøjningen via tyngdefeltet omkring linseobjektet. Sammenligningen med en optisk linse må dog ikke overdrives: alle dele af spektret fra kilden afbøjes med samme vinkel, så der ikke nogen 'farvefejl' på linsen. Det fremgår jo også af formelen (3), da bølgelængden af lyset ikke optræder. Desuden ses, at brydningsindekset vokser med faldende værdier af afstanden  $r$  til det linsende objekt. Det stemmer jo også med formel (1), da en tættere passage af det linsende objekt giver en større afbøjning.

### Afstande og små vinkler – parsec og parallakse

Inden vi ser på linseformler, vil vi se på nogle forenklede formler for afstande, når retvinklede trekantede indeholder meget små vinkler. Og vi skal se, at vinkelmålet i radianer bidrager til forenklingen.

På figur 3 ser vi en enhedscirkel med vinklen  $\alpha$  indtegnet.

## Enhedscirkel



Figur 3: udsnit af enhedscirkel med vinkel, sinus og tangens til vinkel indtegnet

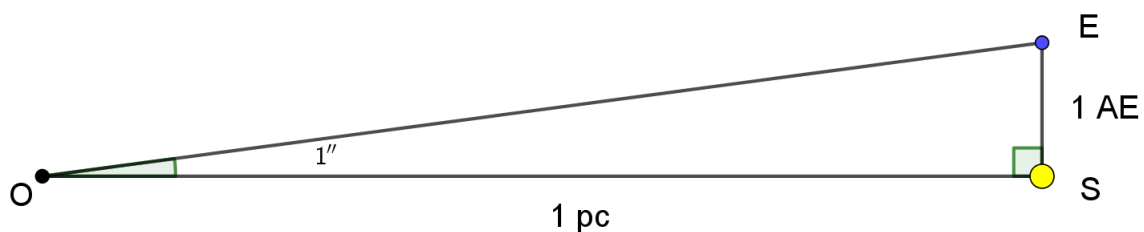
På figur 3 er den positive vinkel  $\alpha$  markeret på enhedscirklen. Længden af den markerede bue BC er radianmålet for vinklen  $\alpha$ . Som det fremgår af figur 3, er der ikke den store forskel på buelængden BC (radianmålet for  $\alpha$ ) og længden af stykket AD (=  $\sin(\alpha)$ ) eller længden af stykket BE (=  $\tan(\alpha)$ ), når vinklen  $\alpha$  er lille. For små vinkler gælder altså:

$$(4) \quad \sin(\alpha) \approx \alpha \quad \text{og} \quad \tan(\alpha) \approx \alpha \quad \text{for små vinkler i radianer}$$

Fx er  $\sin(0,01) = 0,00999983$  og  $\tan(0,01) = 0,01000033$ . Vinklen på 0,01 radianer er det samme som  $0,57^\circ$ .

Det er her passende at omtale den særlige længdeenhed parsec (pc) som ofte bruges i astronomien.

Definitionen af denne længdeenhed hænger sammen buemålet buesekunder ( $''$ ). 1 pc er nemlig den afstand, hvor længdeenheden 1 AE (en astronomisk enhed) 'fylder' et buesekund ( $1''$ ) for observatøren i punktet O, se figur 4 nedenfor.



Figur 4: Definitionen af længdeenheden 1 pc. I afstanden 1 pc 'fylder' Jord-Sol-afstanden (1 AE) et buesekund for iagttageren i O. Størrelsesforholdene på figuren er ikke korrekte, da 1 pc er 206 265 AE!

Vi har fra den elementære geometri:

$$(5) \quad \tan(1'') = \frac{1 \text{ AE}}{1 \text{ pc}}$$

Vi omregner så  $1''$  til radianer (rad):

$$1'' = \frac{1}{3600} \circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{1}{206\,265} \text{ rad}$$

Herefter benytter vi formel (4) for små vinkler:

$$\tan(1'') = \tan\left(\frac{1}{206\,265}\right) \approx \frac{1}{206\,265}$$

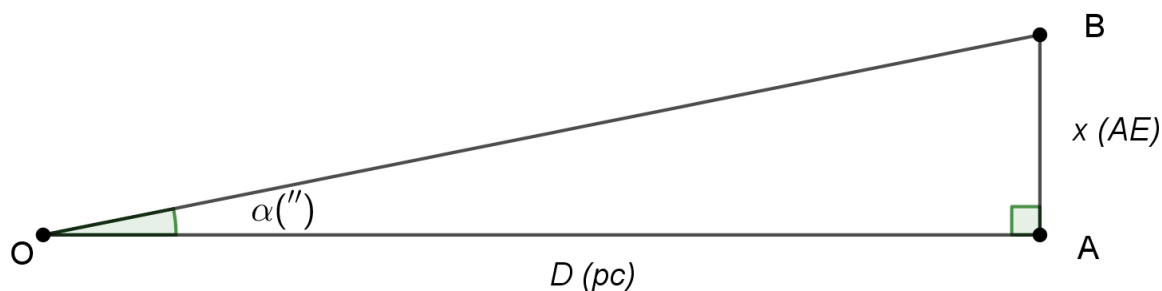
Altså får vi af (5):

$$\frac{1}{206\,265} \approx \frac{1 \text{ AE}}{1 \text{ pc}}$$

hvoraf

$$(6) \quad 1 \text{ pc} \approx 206\,265 \text{ AE}$$

Mere generelt får vi for små vinkler  $\alpha$ , se figur 5:



Figur 5: buesekunder, parsec og AE – sammenhængen er givet i formel (7) nedenfor

Vi benytter formlen

$$\tan(\alpha) = \frac{x}{D} \quad \text{som for små vinkler } \alpha \text{ giver}$$

$$\alpha \approx \frac{x}{D}$$

Vi omskriver  $\alpha$  fra radianer til buesekunder ved at dele med 206 265, se ovenfor.

$$\frac{\alpha('')}{206\,265} \approx \frac{x}{D}$$

som vi omformer til

$$\frac{\alpha('') \cdot D}{206\,265} \approx x$$

Vi deler så med 1 AE på begge sider:

$$\frac{\alpha('') \cdot D}{206\,265 \text{ AE}} \approx x/\text{AE}$$

Men 206 265 AE er jo 1 pc ifølge formel (6), så derfor finder vi endelig sammenhængen

$$(7) \quad \alpha('') \cdot D(\text{pc}) \approx x(\text{AE}) \quad \text{'når man ganger buesekunder med pc, fås AE'}$$

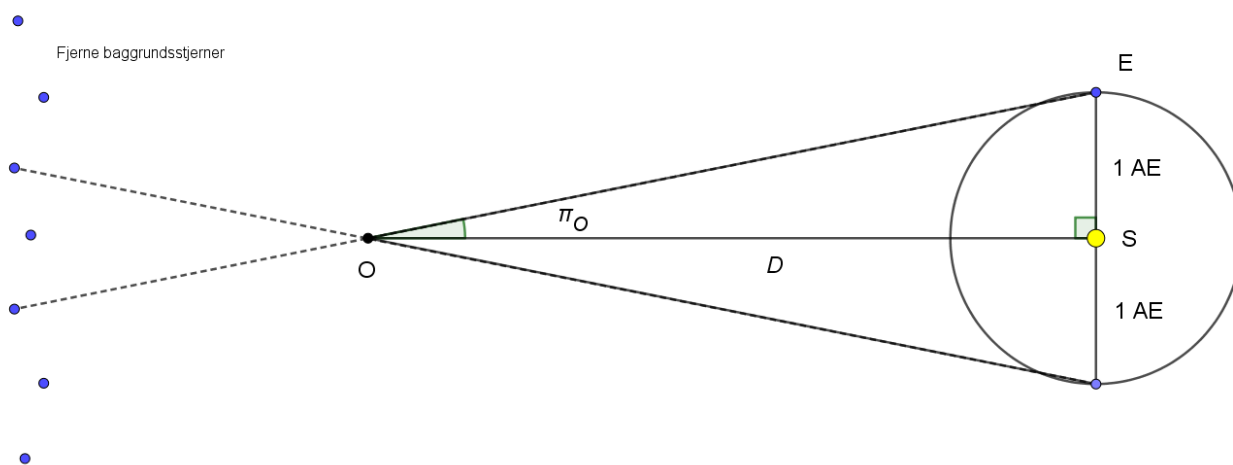
Denne sammenhæng vil vi gentagne gange benytte i det følgende ved konkrete beregninger.

Enheden 1 pc kan omregnes til km, idet  $1 \text{ AE} = 149,598 \text{ mio. km}$ . Fra formel (6) følger så

$$(8) \quad 1 \text{ pc} \approx 206\,265 \text{ AE} = 3,08568 \cdot 10^{13} \text{ km}$$

der igen kan vises at være 3,26 lysår.

Vi vil benytte sammenhængen (7) i forbindelse med definitionen af begrebet parallakse-vinkel, se figur 6.

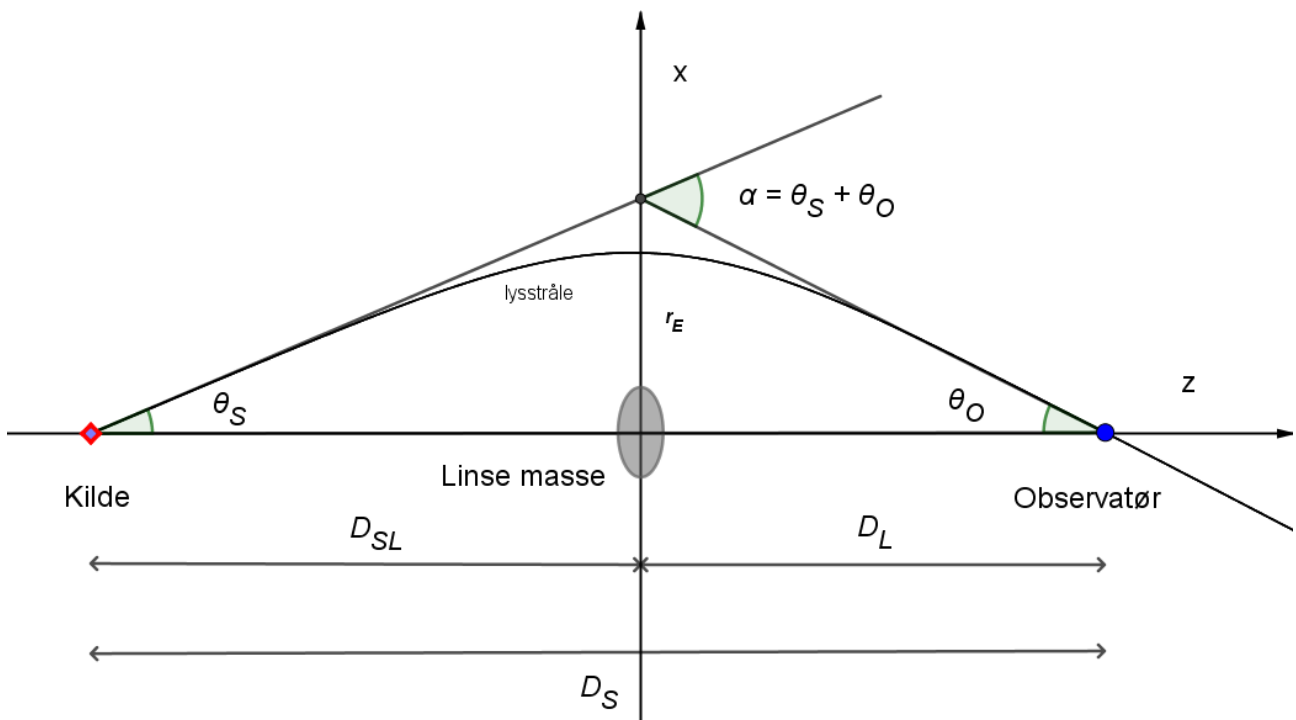


Figur 6: parallakse-definition. Jordens (E) bevægelse i banen om Solen gør, at en iagttagere på Jorden vil se objektet O flytte sig en vinkel på  $2 \cdot \pi_O$  i forhold til fjerne baggrundsstjerner i løbet af et halvt år. Vinklen  $\pi_O$  betegnes objektets parallakse-vinkel. Her må bogstavbetegnelsen  $\pi$  ikke forveksles med tallet  $\pi = 3,141565 \dots!!$

Som det fremgår af figuren, er et objekts årlige parallakse-vinkel  $\pi_O$  halvdelen af den vinkel, som objektet 'flytter' sig i forhold til fjerne baggrundsstjerner i løbet af et halvt år set fra en iagttagere på Jorden. Benytter vi formel (7), får vi relationen ( $D$  er afstanden mellem Solen og objektet).

$$(8) \quad \pi_O('') = \frac{1\text{AE}}{D(\text{pc})} \quad \text{parallaksevinkel-definition for små vinkler } \pi_O$$

## Einstein-ringe: Einstein-vinkel og Einstein-radius



Figur 7: Kilde, linsemasse og observatør på linje.  $D_L$  er afstanden fra observatør til linse,  $D_{SL}$  er afstanden fra kilde til linse – og endelig er  $D_S$  afstanden fra observatør til kildeobjekt. Alle afstande er vinkeldiameterafstande. På figuren er der rotationssymmetri om kilde-observatør-aksen, og lyset fra kilden vil derfor af observatøren ses som en cirkel omkring linseobjektet. Deraf navnet Einstein-ring. Bemærkning: i et ekspanderende Univers uden rumlig krumning er vinkeldiameterafstanden lig med (egen-)afstanden til objektet på tidspunktet for lysets afsendelse. Dette udnytter vi nedenfor når kilde og linse er på kosmologiske afstande.

Den afstand, som lyset passerer linsemassen i, kaldes – når kilde, linsemasse og observatør er på linje – for Einsteinradius  $R_E$ . På figur 7 passerer lysstrålerne tilsyneladende linsemassen noget tættere end de to tangenters skæringspunkt. Men det skyldes udelukkende de voldsomt overdrevne vinkelstørrelser på figuren.

Derfor har vi de to ligninger:

$$R_E \approx D_L \cdot \tan(\theta_O) \approx D_L \cdot \theta_O$$

og

$$R_E \approx D_{SL} \cdot \tan(\theta_S) \approx D_{SL} \cdot \theta_S$$

Her vi har benyttet formel (4) for små vinkler. Desuden har vi afbøjningsvinklen fra formel (1):

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2 R_E}$$

hvor vi har erstattet indfaldsparameteren  $b$  med Einsteinradius. Hvilket igen er acceptabelt pga. den lille afbøjningsvinkel.



Fra figur 7 får vi:

$$\alpha = \theta_S + \theta_O$$

Isolerer vi så  $\theta_S$  og  $\theta_O$  af formlerne ovenfor og indsætter i denne ligning, er resultatet:

$$\frac{4GM}{c^2 R_E} = \frac{R_E}{D_{SL}} + \frac{R_E}{D_L}$$

Vi omformer således for at isolere  $R_E$ :

$$\frac{4GM}{c^2} = \left( \frac{1}{D_{SL}} + \frac{1}{D_L} \right) \cdot R_E^2$$

Og vi får endelig formlen for Einsteinradius for linsemassen:

$$(9) \quad R_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \cdot \frac{D_{SL} \cdot D_L}{D_S}} \quad \text{Einstein-radius}$$

I denne formel er  $D_S = D_{SL} + D_L$ , se figur 7. Denne sidste formel holder dog ikke for kosmologiske afstande og tider, mere herom senere.

Når kilden, linsemassen og observatøren er på linje, er betingelsen for dannelse af en Einsteinring til stede. Observatøren vil se kildens lys fordele sig i en ring omkring linseobjektet. Vinkel-radius i denne cirkel – set fra observatøren – betegnes Einstein-vinklen  $\theta_E$ . Det er naturligvis observatørvinklen  $\theta_O = \frac{R_E}{D_L}$ , og formlen bliver

$$(10) \quad \theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \cdot \frac{D_{SL}}{D_L \cdot D_S}} \quad \text{Einstein-vinklen}$$

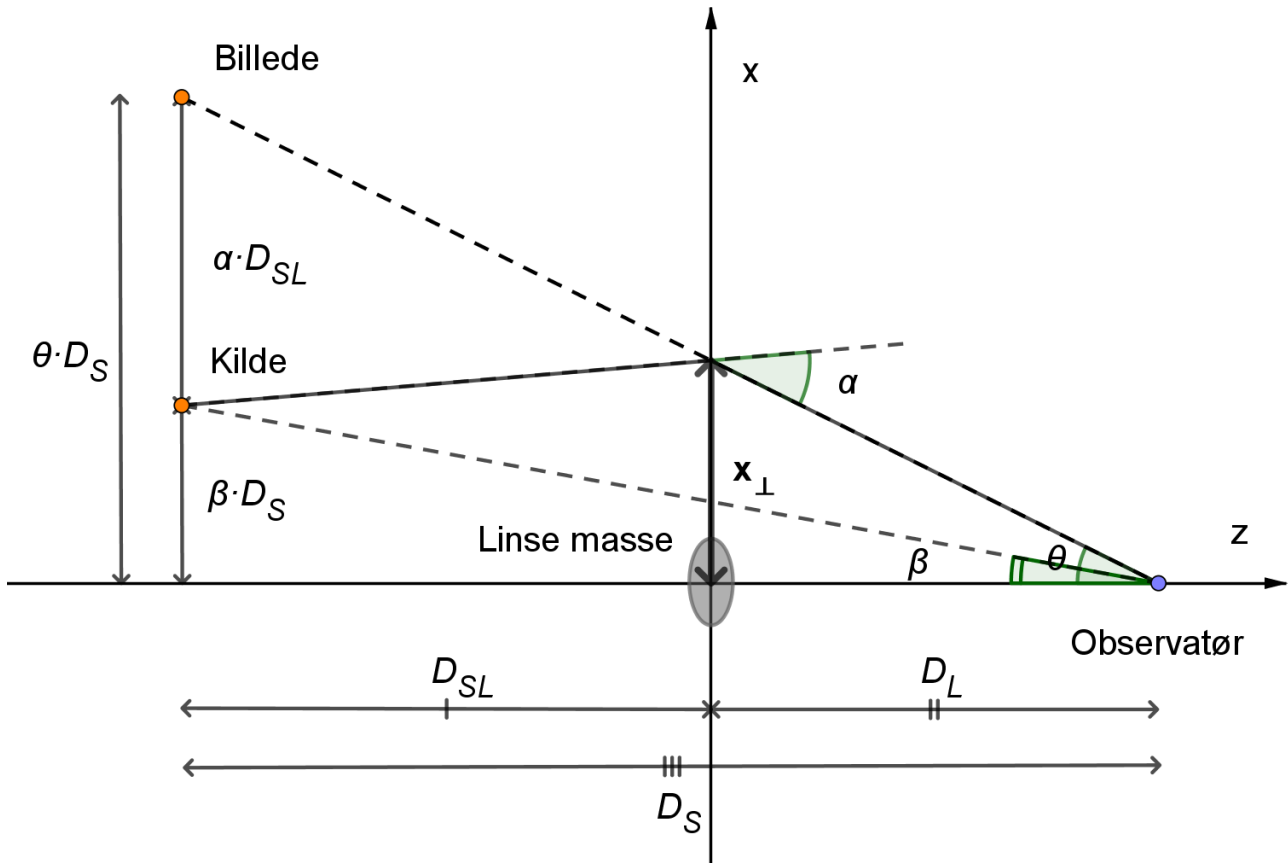
*Øvelse 4: begrund i detalje hvordan de to formler (9) og (10) udledes*

Formel (10) kan også udledes af linseformlen, se nedenfor.

Både Einstein-radius og Einsteinvinklen afhænger af linsemassen og afstandene fra observatøren til linsen og fra kilden til linsen. Måles Einsteinvinklen, og bestemmes også de to afstande fx via rødforskydningen af linsemasse og kilde, kan linsemassen beregnes. Heri er medregnet det mørke stof i linsen, der jo også bidrager til linsens gravitation.

### Linseformlen

På figur 7 ligger observatør, linse og kilde på linje. Det er naturligvis sjældent tilfældet, så derfor vil vi her se på det tilfælde hvor kildens placering afviger fra linjen gennem observatør-linse. Se figur 8.



Figur 8: Figur til linseformel - de relevante lodrette afstande i kildeplanen ses til venstre på figuren

Fra figur 8 kan vi opstille den såkaldte linseformel:

$$(11) \quad \theta \cdot D_S = \beta \cdot D_S + \alpha \cdot D_{SL} \quad \text{Linseformel}$$

Af figur 8 ses yderligere, at

$$x_{\perp} = \theta \cdot D_L$$

Som vi indfører i formel (1) i stedet for  $b$ :

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2 b} = \frac{4GM}{c^2 \theta \cdot D_L}$$

Vi indsætter dette i formel (11):

$$\theta = \beta + \alpha \cdot \frac{D_{SL}}{D_S} = \beta + \frac{4GM}{c^2 \theta \cdot D_L} \cdot \frac{D_{SL}}{D_S} = \beta + \frac{4GM}{c^2} \cdot \frac{D_{SL}}{D_S \cdot D_L} \frac{1}{\theta} = \beta + \frac{\theta_E^2}{\theta}$$

hvor vi har benyttet formel (10).

Altså er vi nået frem til formlen

$$(12) \quad \theta = \beta + \frac{\theta_E^2}{\theta}$$

I parentes bemærket får vi formel (10) for Einsteinvinklen  $\theta_E$  igen hvis vi sætter  $\beta = 0$  i formlen

$\theta = \beta + \frac{4GM}{c^2 \theta \cdot D_L} \cdot \frac{D_{SL}}{D_S}$  ovenfor og isolerer  $\theta$ . Det var jo også at forvente.

Løsningerne til formel (12) med hensyn til  $\theta$  bestemmer retningen til billederne af kildeobjektet, udtrykt ved retningen til kildeobjektet uden linse  $\beta$  og Einsteinvinklen  $\theta_E$ .

Vi omskriver formelen (12) ved at gange ligningen igennem med den ubekendte  $\theta$ :

$$\theta^2 - \beta \cdot \theta - \theta_E^2 = 0$$

Dette er jo en 2. grads ligning, og løsningen er

$$(13) \quad \theta_{\pm} = \frac{1}{2}(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2})$$

På figur 8 er kun vist  $\theta_+$ -løsningen, hvorimod  $\theta_-$ -løsningen vil ses under den vandrette  $z$ -akse. Strålegangen for  $\theta_-$ -løsningen fra kilden til observatøren passerer altså under linse-massen.

Plus løsningen  $\theta_+$  i (13) er større end Einsteinvinklen  $\theta_E$ , hvorimod minus løsningen  $\theta_-$  er (numerisk) mindre end denne vinkel.

*Øvelse 5: vis, at løsningen (13) er korrekt*

### Svag og stærk linsepåvirkning

Einstein-vinklen er afgørende for hvor påvirket billedet af kilden er: er vinklen mellem kilden og linsen større end Einsteinvinklen, vil det nærmest ikke kunne ses at kilden er linsepåvirket – det kaldes *svag* linsepåvirkning. Er der flere kilder/galakser i området med svag linsepåvirkning, kan linsepåvirkningen af galaksernes form dog undertiden påvises statistisk.

$$\beta > \theta_E: \quad \text{svag linsepåvirkning – kun en svagt ændret galakseform ses}$$

Er vinklen mellem kilden og linsen derimod mindre end Einsteinvinklen, er kilden *stærkt* linsepåvirket. Her vil optræde multiple billeder af kilden.

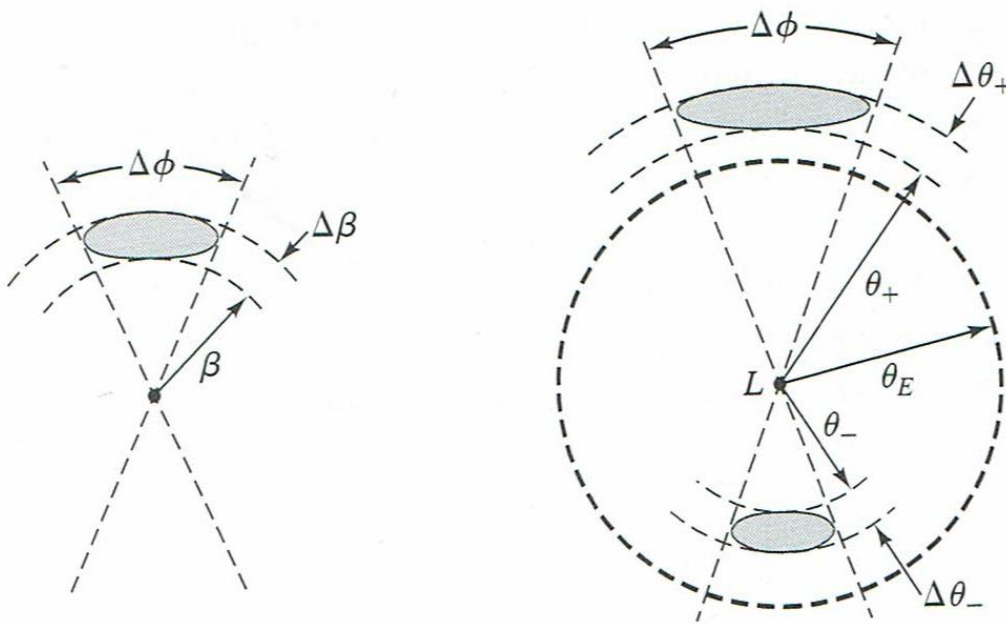
$$\beta < \theta_E: \quad \text{stærk linsepåvirkning – multiple billeder af kilden, Einsteinbuer, Einsteinringe}$$

### Lysstyrken af de to billeder - forstærkningsfaktor

Lad os betegne de to billeder af kilden svarende til de to løsninger  $\theta_{\pm}$  til (13) for  $I_{\pm}$ . Hvordan er nu lysstyrken af de to billeder sammenlignet med lysstyrken af kilde-objektet uden linsen?

Hertil er det vigtigt at vide, at overflade-lystyrken for billederne er uændret i forhold til kildens overflade-lystyrke uden linse. Det betyder, at hvis billedet af kilden fylder mere i areal end kilden uden linse, vil billedets lysstyrke være tilsvarende større.

På figur 9 ses til venstre kilden uden påvirkning af linsen, og til højre de to billeder af kilden som linsen forårsager.



Figur 9: kilde uden linse (tv) og med linse (th). Kilden er placeret ved vinklen  $\beta$  over det sted, linsen 'indsættes' på figuren th. Kildens udstrækning er defineret ved de to vinkeltilvækster  $\Delta\beta$  og  $\Delta\phi$ . På figuren th er den punktførmige linse  $L$  'indsat', og kilden ses nu som to billeder forskudt i retningen radiale væk fra linsen placeret ved vinklerne  $\theta_{\pm}$  i forhold til observatør-linse retningen, med samme azimutale udstrækning  $\Delta\phi$ , men med forskellige værdier af polarvinkel-udstrækningen  $\Delta\theta_{\pm}$ . Det nedre billede er 'spejlet' i linsen og vender modsat det øvre. Figuren er fra ref. 1.

Polarvinkel-udstrækningen  $\Delta\theta_{\pm}$  kan findes ud fra (den lille) polarvinkeludstrækningen  $\Delta\beta$  af kilden uden linse-påvirkning for en lille tilvækst i  $\beta$ , ved at differentiere formlen (13) mht.  $\beta$ :

$$(14) \quad \Delta\theta_{\pm} = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}} \right) \cdot \Delta\beta$$

Øvelse 6: vis, at dette er korrekt!

Herved er vi klar til at beregne rum-vinkeludstrækningen ('arealerne  $A'$ ) af billederne og sammenligne dem med det tilsvarende for det 'uforstyrrede' billede. Forholdet mellem disse vil direkte give os lysstyrken af billederne sammenlignet med lysstyrken af den ikke-linsede kilde.

Altså:

$$(15) \quad \frac{A_{\pm}}{A_S} = \left| \frac{\theta_{\pm}}{\beta} \cdot \frac{\Delta\theta_{\pm} \cdot \Delta\phi}{\Delta\beta \cdot \Delta\phi} \right| \quad \text{arealforhold billede/kilde}$$

Faktoren  $\theta_{\pm}/\beta$  giver den forøgede 'bredde' af billederne sammenlignet med kildens 'bredde'.

Benytter vi så (14) og (15), får vi arealforholdet billede/kilde:

$$(16) \quad a_{\pm} = \frac{A_{\pm}}{A_S} = \frac{1}{4} \left( \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}} + \frac{\sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}{\beta} \pm 2 \right) \quad \text{Forstærkning af kildens lysstyrke i billederne}$$

Øvelse 7: eftervis udtrykket (16)!

Da  $x + \frac{1}{x} \geq 2$ , vil parentesens altid være positiv. Billedet uden for Einsteinringen er det mest lysstærke, mens billedet indenfor Einsteinringen er det mindst lysstærke.

*Øvelse 8: begrund uligheden  $x + \frac{1}{x} \geq 2$  for alle positive værdier af  $x$*

Indfører vi den variable

$$u = \beta/\theta_E$$

altså vinklen  $\beta$  i enheder af Einsteinvinklen  $\theta_E$ , vil udtrykket (16) kunne reduceres til

$$(17) \quad a_{\pm} = \frac{A_{\pm}}{A_S} = \frac{1}{2} \left[ \frac{u^2+2}{u\sqrt{u^2+4}} \pm 1 \right] \quad \text{Forstærkningsfaktor for kilden udtrykt ved } u = \beta/\theta_E$$

*Øvelse 9: tegn graferne for de to funktioner i (17) for positive værdier af den variable  $u$ . Er der nogen øvre grænse for forstærkningen?*

### Mikrolinse-begivenheder

Mikrolinse-begivenheder vedrører typisk kilder og linser i Mælkevejen. Mikrolinse begivenheder involverer linsemasser af størrelsesordenen en solmasse eller mindre, det være sig en stjerne, sort hul, brun dværg eller planet. Det er naturligvis linsemassen der bøjer lyset fra kilden, der fx kunne være en hovedserie-stjerne. Linsevirkningen er ikke afhængig af lys fra linsen, og tillader således i visse tilfælde bestemmelse af massen af ikke-lysende objekter og er pt den eneste metode til at påvise disse. Hvis den centrale linsemasse omkredses af en planet, vil også planetens linsevirkning kunne ses – oven i det forstærkede lys fra den centrale masse.

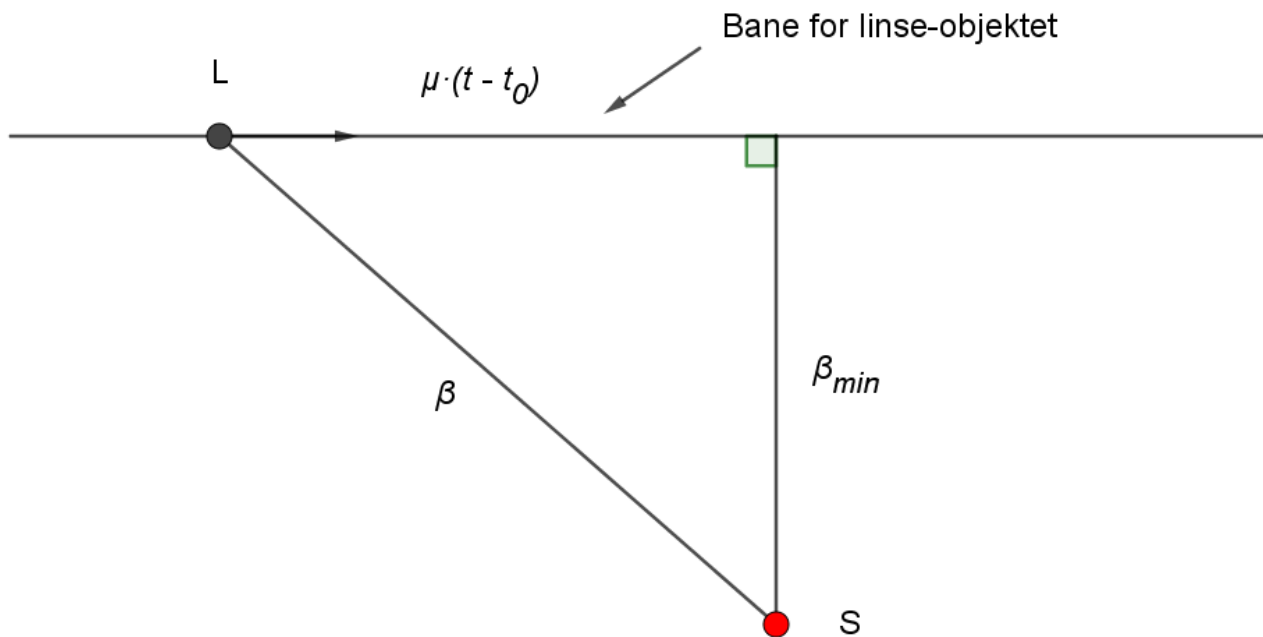
I mikro-linse begivenheder kan de to billeder af kilden ikke adskilles med den nuværende teknologi. Se dog nedenfor for den seneste opdatering, herunder interferometri. Derfor vil kun den samlede forstærkning kunne måles. Af (17) fås

$$(18) \quad a_{tot} = \frac{A_{total}}{A_S} = \frac{A_+ + A_-}{A_S} = \frac{u^2+2}{u\sqrt{u^2+4}} \quad \text{Samlet forstærkning, begge billeder}$$

Vi forestiller os, at et linseobjekt L bevæger sig tæt forbi et kildeobjekt, fx en stjerne. Herved vil lysstyrken af kildeobjektet forstærkes efter formel (18). På figur 10 er linseobjektets bane og kildeobjektet S indtegnet. Når linseobjektet er tættest på kildeobjektet, er vinklen mellem dem  $\beta_{min}$ . Den relative egenbevægelse af linse-objektet i forhold til kilde-objektet betegnes med  $\mu$ . Herefter kan vinkelafstanden mellem linseobjekt og kildeobjekt beregnes fra formelen

$$\beta = \sqrt{\beta_{min}^2 + (\mu \cdot (t - t_0))^2}$$

hvor  $t$  er tiden, og  $t = t_0$  når  $\beta = \beta_{min}$ .



Figur 10: geometrien i en linsebegivenhed: linse-objektet  $L$  passerer kildeobjektet  $S$  med minimumsvinkelafstanden  $\beta_{min}$

Vi deler på begge sider i formelen for  $\beta$  med  $\theta_E$  for at få den variable  $u = \beta/\theta_E$  i spil – og indfører betegnelsen  $t_E = \theta_E/\mu$  for den såkaldte Einsteinetid – den tid, det tager linsen at bevæge sig en Einsteinvinkel  $\theta_E$  i forhold til kilden. Og vi får herefter:

$$u = \sqrt{u_{min}^2 + ((t - t_0)/t_E)^2}$$

Vi indsætter dette udtryk i formel (18) og tegner grafer for forskellige værdier af  $u_{min} = \beta_{min}/\theta_E$ . Se figur 11. Som det ses, er forstærkningen stærkt afhængig af hvor tæt linseobjektet kommer på kildeobjektet – i enheder af Einstein-radius. For små værdier af  $u_{min}$  er den maksimale forstærkning tæt på  $1/u_{min}$ , som det fremgår af udtrykket (18). Altså har vi:

$$(19) \quad a_{tot,max} \approx \frac{\theta_E}{\beta_{min}} \quad \text{maksimal forstærkningsfaktor for mindre værdier af } \beta_{min}/\theta_E$$

Er fx  $\beta_{min} = 0,1 \cdot \theta_E$  så er den maksimale totale forstærkningsfaktor tæt ved 10 – som det også fremgår af figur 11 nedenfor.

Mere generelt kan vi beregne værdien af  $u = \beta/\theta_E$  fra formelen

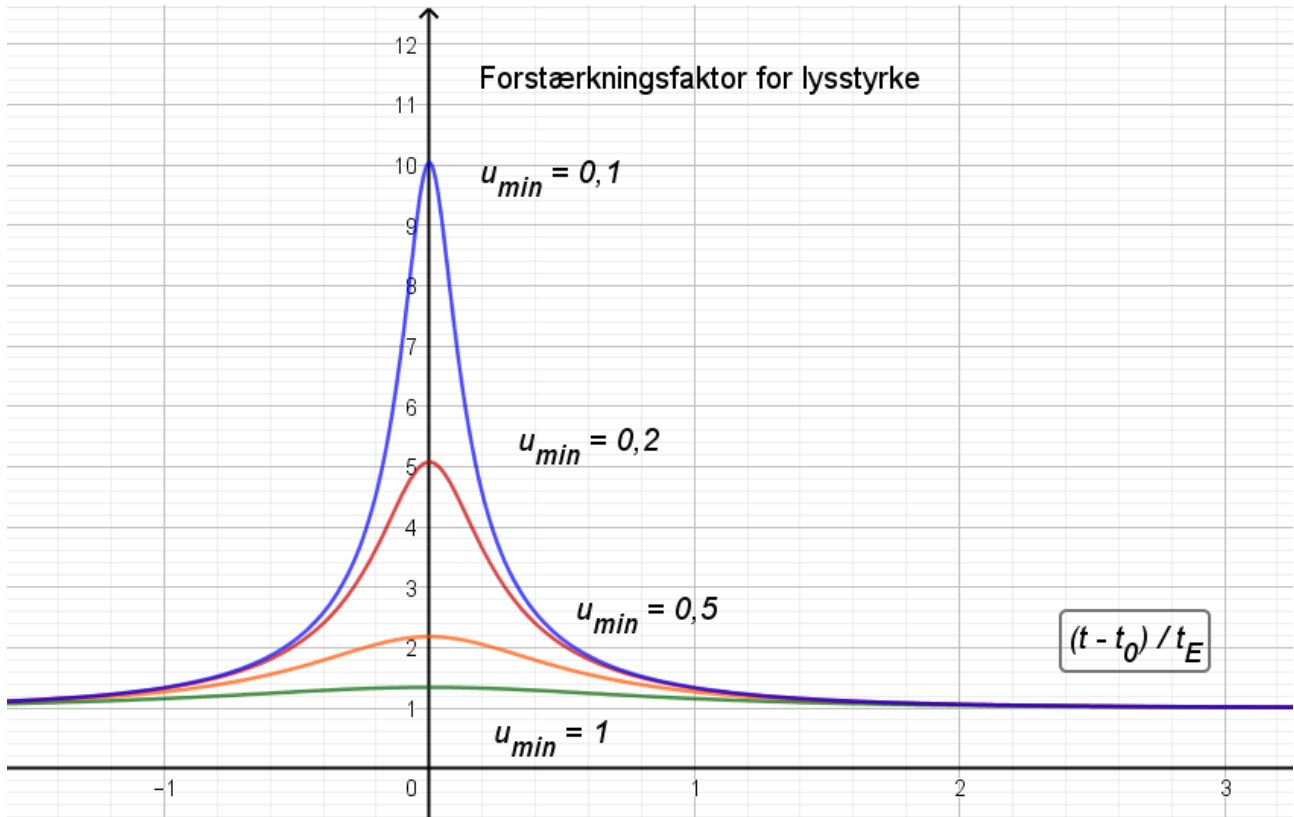
$$(20) \quad u = \beta/\theta_E = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{1-(a_{tot})^{-2}} - 2}}$$

og specielt

$$(21) \quad u_{min} = \beta_{min}/\theta_E = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{1-(a_{tot,max})^{-2}} - 2}}$$

Beregning af hvor tæt passagen af linsen er på linsen givet den maksimale forstærkningsfaktor

Formlen kan let eftervises med udgangspunkt i formel (18).

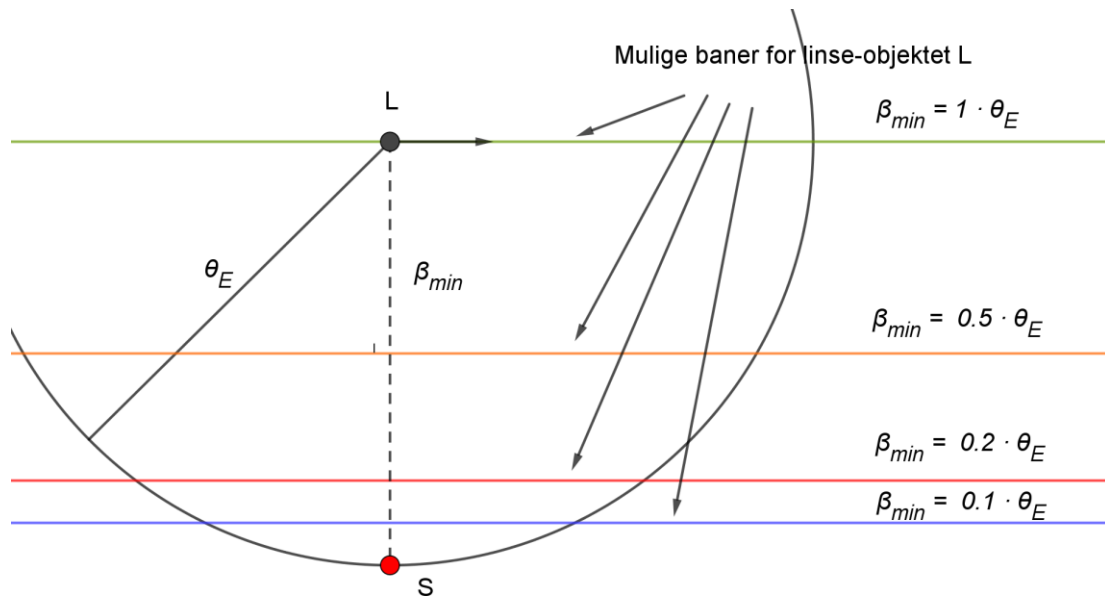


Figur 11: forstærkningsfaktor for kildens lysstyrke ved mikrolinsning. Vi har Indført betegnelsen  $t_E = \theta_E / \mu$ , og tiden på 1. akse er således målt i Einsteintider. Kurverne kaldes undertiden Paczynski kurver, opkaldt efter den polske astronom Bohdan Paczynski (1940 – 2007)

Hvis fx en stjerne er 'udsat' for mikrolinse-virkning, skal stjernens lysstyrke som funktion af tiden kunne parametriseres med to parametre, nemlig  $u_{min} = \beta_{min} / \theta_E$  og  $t_E = \theta_E / \mu$ .

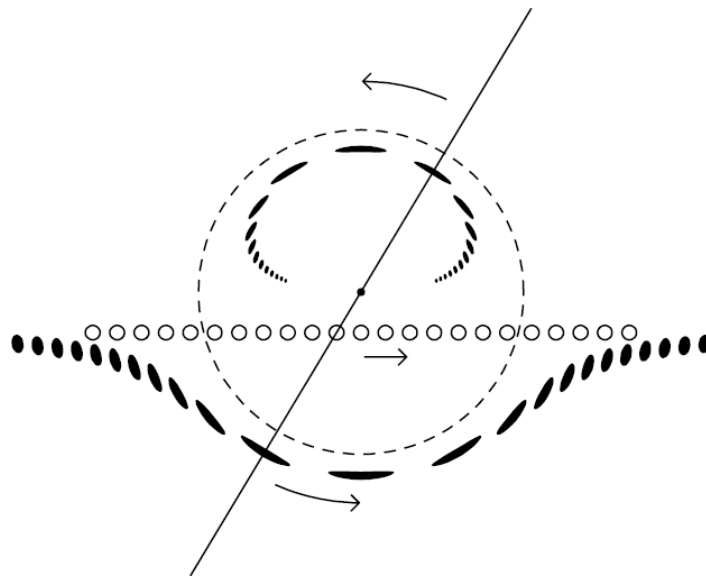
Desuden skal alle dele af stjernens spektrum følge den samme forstærkningskurve.

På figur 12 ses passagen af linsen med forstærkningskurverne fra fig. 11.



Figur 12: Forskellige baner for linse-objektet L der passerer mere eller mindre tæt på kildeobjektet S. På figuren passerer det indtegnede linse-objekt kilden i afstanden en Einsteinradius. Den maksimale forstærkning af lysstyrken fra kilden afhænger af forholdet  $u_{min} = \beta_{min}/\theta_E$  som vist på figur 11. Linse-objektet 'medbringer' det væsentligste linseområde, som er cirkelområdet inden for Einsteincirklen med radius  $\theta_E$  og med centrum i linse-objektet.

Hvis vi kunne opløse linsebegivenhedens to billeder, ville vi se noget i stil med figur 13 nedenfor, hvor linseobjektet holdes i fokus.



Figur 13: Mikrolinsebegivenhed - kilden (den lille åbne cirkel) kører ind fra venstre og giver to linsede billeder på hver sin side af linseobjektet på en linje gennem dette (sorte 'klatter'). Den stiplede cirkel med centrum i linseobjektet har Einstein-vinklen for linseobjektet som radius. Sammenlign i øvrigt med figur 9. Figuren er fra ref. 3.

#### Beregningseksempel: mikro-linser og størrelse af Einstein-ring

Vi antager, at linseobjektet har en masse som Solen, og at det befinder sig på halvvejen til den Store Magellanske Sky, hvor kildeobjektet befinder sig. Afstanden til den Store Magellanske Sky er ca. 50 000 pc.



Vi vil beregne størrelsen af Einsteinvinklen for at afgøre, om det er muligt at 'se' denne ring (eller de to adskilte billeder af kilden) med nuværende teleskoper.

Vi bruger formel (10) til beregningen af Einsteinvinklen (Schwarzschild-radius for Solen  $\frac{2GM}{c^2}$  er 2,95 km):

$$\begin{aligned}\theta_E &= \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \cdot \frac{D_{SL}}{D_L \cdot D_S}} = \sqrt{2 \cdot 2,95 \text{ km} \frac{25\,000 \text{ pc}}{25\,000 \text{ pc} \cdot 50\,000 \text{ pc}}} = \sqrt{\frac{5,90 \text{ km}}{50\,000 \text{ pc}}} \\ &= \sqrt{\frac{5,90 \text{ km}}{50\,000 \cdot 3,086 \cdot 10^{13} \text{ km}}} = 1,96 \cdot 10^{-9} \text{ rad} = 4,03 \cdot 10^{-4}''\end{aligned}$$

Og som vi har set ovenfor, finder linseeffekterne sted indenfor eller tæt ved Einsteinringen omkring linseobjektet. Vinkelopløsningen for teleskopet skal derfor være ca. 0,4 milli-buesekund (mas) eller bedre for at kunne opløse Einsteinringen eller de to billeder af kildeobjektet. En sådan opløsning er ikke mulig med dagens teleskoper, som beregningen nedenfor (øvelse 10) vil vise - medmindre der tages metoder som interferometri i anvendelse.

#### Øvelse 10

Det såkaldte Rayleigh kriterium giver den mindste apertur-størrelse  $D$  (diameter af teleskop-spejl) der skal til for at opløse en Einsteinring ( $\lambda$  er lysets bølgelængde):

$$D = \frac{1,22 \cdot \lambda}{\sin(2\theta_E)}$$

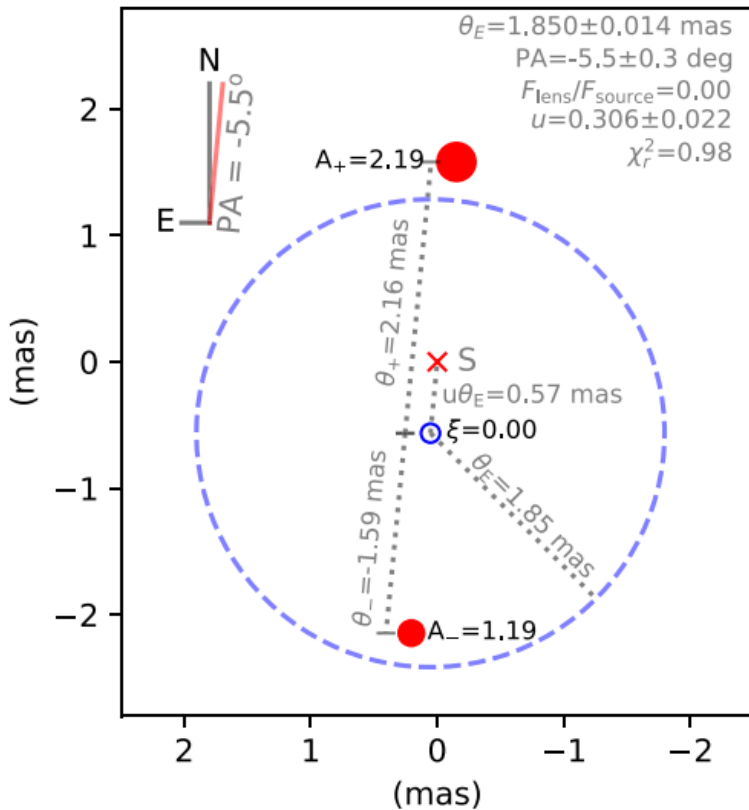
Beregn  $D$ , idet du antager, at  $\theta_E = 4,0 \cdot 10^{-4}''$  og  $\lambda = 500 \text{ nm}$

#### Opløsning af de to billeder i en mikrolinse med interferometri

I interferometri kombineres lyset fra flere godt adskilte teleskoper, og det giver en langt nedre vinkelopløsning end de enkelte teleskoper kan give. Se evt. ref. 9, hvor der refereres til VLTI interferometri brugt til bestemmelse af vinklen i en Einsteinring i milli-buesekund området. Og ref. 10 for den første observation af de to billeder af en kilde, i stil med figur 13. Forholdet mellem forstærkningsfaktorerne i de to billeder tillader en bestemmelse af størrelsen  $u$ , der også kan bestemmes ud fra lyskurven. Separationen af de to billeder giver så umiddelbart Einsteinvinklen  $\theta_E$ , efter formlen

$$(22) \quad \theta_+ - \theta_- = \sqrt{u^2 + 4} \cdot \theta_E$$

som det let kan vises fra formel (13) og sammenhængen  $u = \beta/\theta_E$ .



Figur 14: mikrolinsebegivenhed med opløste billeder af kilden. Se ref. 10. Værdien af  $u$  ( $0,306$ ) kan beregnes af den samlede forstærkning  $a = 2,19 + 1,19 = 3,38$  indsat i formel (20). Forstærkningsfaktoren for lyset i de to enkeltbilleder er angivet på figuren, tjek med formel (17). Einsteinvinklen på  $1,85$  millibuesekunder beregnes fra formel (22) ovenfor. De to billeders vinkelafstand til linsen fremgår også. Sammenlign med formel (13) der med den variable  $u$  bliver

$$\theta_{\pm} = \frac{1}{2}(u \pm \sqrt{u^2 + 4}) \cdot \theta_E$$

Kildens placering er givet ved  $\beta = u \cdot \theta_E$ . I denne beregningsmodel antages det, at linsen ikke bidrager med lys. Det giver dog ikke den mest optimale model, se ref. 10.

Vinkelenheden mas på figuren betegner millibuesekunder

Bestemmelse af linsemassen kræver dog mere end kendskabet til Einsteinvinklen som det fremgår nedenfor.

Hvis vi kender maksimal forstærkningsfaktor for kilden (eksempler på figur 11), afstand til kilde  $D_S$  og linse  $D_L$ , samt linsens relative egenbevægelse i forhold til kilden  $\mu$ , kan kildens lyskurve (som fig. 11) give os værdien af Einstein tiden  $t_E = \theta_E / \mu$ , der er den tid, linsen er om at bevæge sig en Einstein-vinkel. Vi kan så beregne Einsteinvinklen  $\theta_E = t_E \cdot \mu$ . Og med kendskab til  $\theta_E$  og de omtalte afstande, kan massen af linsen beregnes. Afstanden til kilden er ofte kendt fra Gaia-målinger, men afstanden til linsen er ukendt. Men hvis det er muligt at bestemme parallakse-ændringer for linse og kilde, kan også afstandene til denne bestemmes og dermed massen af linsen. Se nærmere herunder.

Den relative parallakse af linse og kilde er defineret ved (se definitionen på parallakse på fig. 6)

$$\pi_{rel} = \frac{1 \text{ AE}}{D_L} - \frac{1 \text{ AE}}{D_S}$$

og indgår direkte i formlen for Einsteinvinklen, idet

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \cdot \frac{D_S - D_L}{D_L \cdot D_S}} = \sqrt{\frac{4GM}{c^2 \cdot 1 \text{ AE}} \cdot \left( \frac{1 \text{ AE}}{D_L} - \frac{1 \text{ AE}}{D_S} \right)} = \sqrt{\frac{4GM}{c^2 \cdot 1 \text{ AE}} \cdot \pi_{rel}}$$

Er den relative parallakse  $\pi_{rel}$  og Einsteinvinklen  $\theta_E$  kendt, kan massen  $M$  af linsen beregnes.

## Måling af to lyskurver for linsebegivenhed til bestemmelse af mikrolinse-parallakse

Er det muligt at følge linsebegivenheden fra både et jordbaseret observatorium og et rumbaseret teleskop som fx Spitzer, kan følgende størrelse (kaldet mikrolinse parallaksen  $\pi_E$ ) måles:

$$\pi_E = \frac{\pi_{rel}}{\theta_E} \quad \text{Mikrolinse parallakse, i enheder af Einsteinvinklen}$$

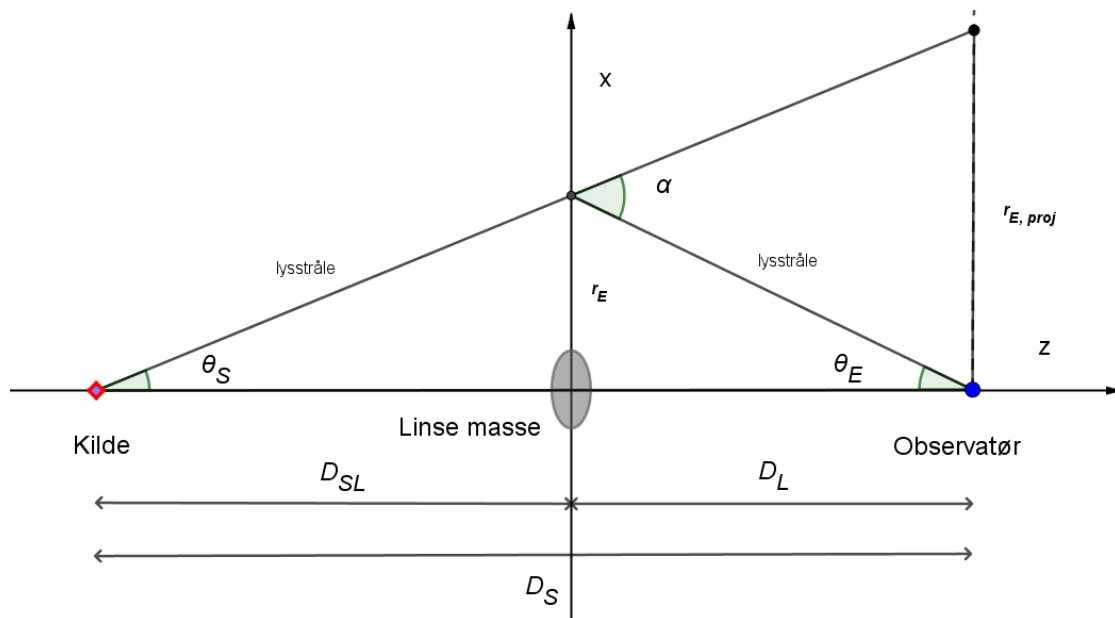
Er de to observatorier adskilt med en afstand af størrelsesordenen 1 AE, vil lyskurverne for linsebegivenheden se vidt forskellig ud set fra de to observatorier, idet både tidspunktet for maksimal forstærkning af kildens lys og indfaldsparameteren  $u_{min}$ , der er relateret til den maksimale forstærkning, vil være forskellige fordi retningen til både linse og kilde er forskellige. Dog vil de have samme værdi af Einsteintiden  $t_E$ . Se ref. 12 for at se to vidt forskellige lyskurver for den samme mikrolinsebegivenhed.

Det er intuitivt klart, at de forskellige observationsretninger fra de to observatorier til linse og kilde indeholder information om den relative parallakse. Men at  $\pi_E$  også vedrører Einsteinvinklen  $\theta_E$  kan følgende betragtning kaste lys over. Der er nemlig en simpel sammenhæng mellem  $\pi_E$  og projektionen af Einstein-radius  $r_E$  fra kilden tilbage på observatør-planen  $r_{E\ proj}$ , nemlig

$$r_{E\ proj} = \frac{D_S}{D_S - D_L} r_E = \frac{D_S \cdot D_L}{D_S - D_L} \theta_E = \frac{1AE}{\pi_{rel}} \theta_E = \frac{1AE}{\pi_E}$$

Afstanden  $r_{E\ proj}$  afspejler det område i observatørplanen, hvorfra linsebegivenheden på samme tid kan ses med en vis forstærkning af kilde-lyset. Uden afbøjning ville det modtagne lys være havnet i afstanden  $r_{E\ proj}$  fra observatøren O i observatørplanen vinkelret på observatør-linse-kildeaksen på figur 15. Se evt. ref. 11.

For betegnelser henvises til figur 15 nedenfor, hvor  $r_E$  er afstanden fra linsecentrum til lysets passage af linsen.



Figur 15: projektionen af Einsteinradius på observatørplanen

Faktisk kan størrelsen af  $\pi_E$  tilnærmelsesvis beregnes direkte ud fra forskellen på de to lyskurvers tidspunkter for maksimum forstørrelse  $t_{0,sat} - t_0$  ( $t_0$  er maksimumtidspunktet fra jord-observatoriet,  $t_{0,sat}$  er det tilsvarende tidspunkt set fra satellitten) og tilsvarende forskellen på de to lyskurvers

'indfaldsparametre'  $u_{min,sat} - u_{min}$  der kan bestemmes ud fra lyskurvernes maksimums-forstærkning, formel (21). Herudover skal den fælles Einsteintid bruges, sammen med  $D_{\perp}$ , som er afstanden mellem jord-observatoriet og satellitten projiceret på observatør-planen. Givet disse størrelser afledt fra de to lyskurver – og  $D_{\perp}$  – er  $\pi_E$  givet ved

$$\pi_E \approx \frac{1AE}{D_{\perp}} \cdot \sqrt{\left(\frac{t_{0,sat}-t_0}{t_E}\right)^2 + (u_{min,sat} - u_{min})^2}$$

svarende til to forskellige linsespor på figur 12 med forskellige placeringer af linsen både vandret ('øst') og lodret ('nord'). Vi springer her let (og elegant?) over problemet med relative fortegn for  $u_{min,sat}$  og  $u_{min}$ .

Massen af linsen kan herefter beregnes af relationen

$$\theta_E = \frac{4GM}{c^2 \cdot 1AE} \cdot \pi_E$$

*Øvelse 11* Begrund denne relation!

Det kan vises, at  $\frac{4G}{c^2 \cdot 1AE} = 8,14 \cdot 10^{-3} \text{ ''}/M_{\odot}$ , og dermed

$$\theta_E = 8,14 \cdot 10^{-3} \text{ ''} \cdot \frac{M}{M_{\odot}} \cdot \pi_E \quad \text{hvoraf} \quad M = \frac{\theta_E}{\pi_E} \cdot \frac{1}{8,14 \cdot 10^{-3} \text{ ''}} \cdot M_{\odot} \quad \text{linsesmasse}$$

Er således både  $\theta_E$  og  $\pi_E$  kendte, kan massen af linsen nemt beregnes. Desuden kan afstanden til linsen beregnes af

$$\pi_{rel} = \pi_E \cdot \theta_E = \frac{1AE}{D_L} - \frac{1AE}{D_S} \quad \text{hvoraf} \quad D_L = \left(\frac{\pi_{rel}}{1AE} + \frac{1}{D_S}\right)^{-1} \quad \text{linsafstand}$$

Når afstanden til kilden  $D_S$  samt  $\theta_E$  og  $\pi_E$  er kendte.

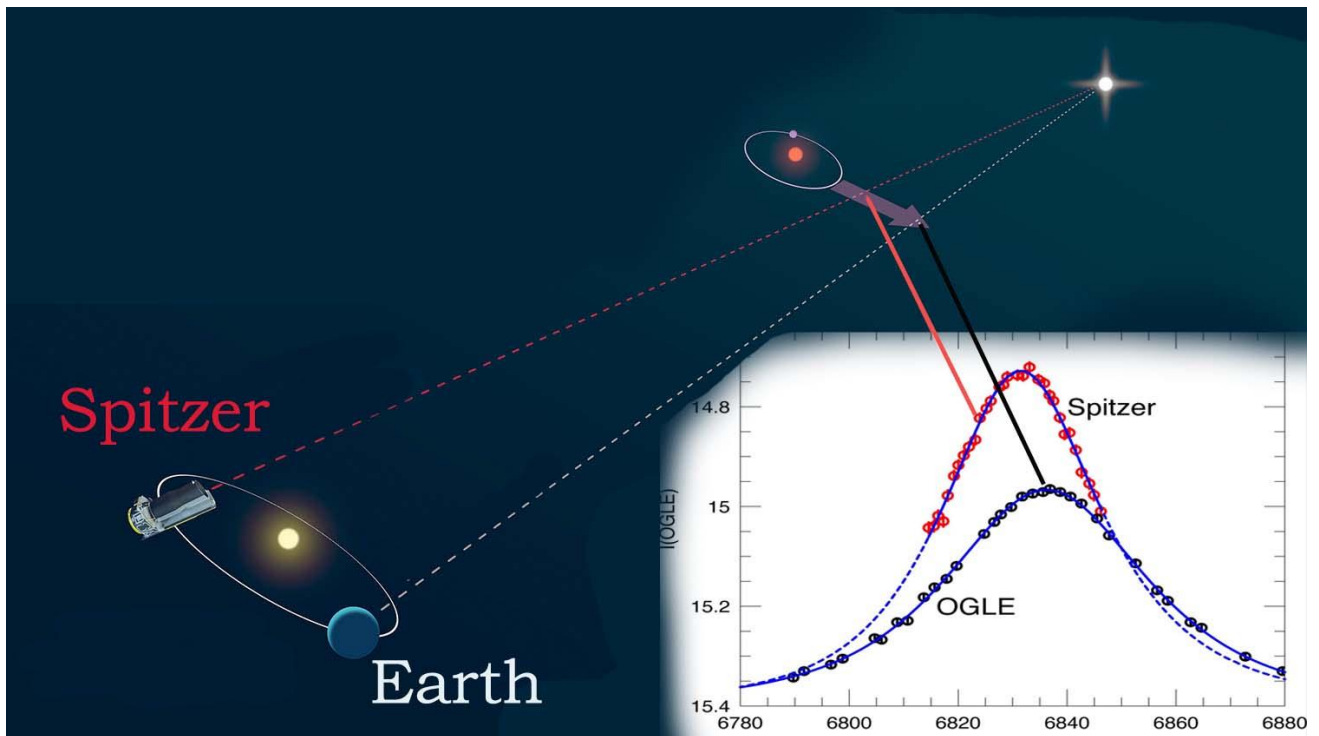
Endelig kan den relative egenbevægelse bestemmes af sammenhængen

$$\mu = \frac{\pi_{rel}}{t_E} \quad \text{relativ egenbevægelse linse-kilde}$$

hvor Einsteintiden  $t_E$  bestemmes ud fra lyskurven.

En enkelte lyskurve kan altså (punktformig linse og kilde) ikke i sig selv give os massen af linsen, men alene Einsteintiden  $t_E$ .

Situationen illustreres godt af følgende figur 16 (fra ref. 13)



Figur 16: kildens lyskurve iagttaget af et jordbaseret observatorium og af Spitzer rumteleskopet. Se mere i ref. 13. Lyskurverne viser forskellige tidspunkter for maksimum forstærkning og en større værdi af denne forstærkning for Spitzer-teleskopet, fordi lyset fra kilden passerer tættere på linsen på vej til Spitzer-teleskopet end lyset på vej til jordobservatoriet. Linsemassen er her bestemt til  $0,23 M_{\odot}$  og afstanden til linsen er bestemt til  $3,1 \text{ kpc}$ . (PLANET collaboration)

Vi har ovenfor nævnt en mulig metode til måling af Einsteinvinklen  $\theta_E$ , nemlig VLTI interferometri, hvor de to billeder af kilden kan opløses.

En anden metode til at måle Einsteinvinklen  $\theta_E$  der ikke kræver at de to billeder kan opløses kunne kaldes astrometrisk mikro-linsning. Her måles den astrometriske forskydning af 'lys-tyngdepunktet' i forhold til positionen af kilden. Se mere i ref. 10, hvor også andre metoder er omtalt.

Og vi har omtalt en metode til bestemmelse af mikrolinse parallaksen  $\pi_E$  med måling af to lyskurver fra observatorier godt adskilt på tværs af synslinjen til mikrolinsebegivenheden. Når både Einsteinvinklen og mikrolinse parallaksen er målt, er det nemt at beregne fx massen af linsen, se ovenfor. Massen er en central parameter når arten af linseobjektet skal bestemmes.

Opgave 1 nedenfor skal vise, hvordan beregningen af linsemassen kan ske når lyskurven, afstandene og den relative egenbevægelse er kendte.

#### Første isolerede sorte hul i Mælkevejen opdaget 2022

En opdagelse med dansk deltagelse, publiceret juli 2022 i *Astrophysical Journal*, se ref. 16, er opdagelsen af det første isolerede sorte hul med en masse på 7 solmasser på en afstand af 1,6 kpc (5000 lysår) i retning af Mælkevejens centrum hvor lysforstærkningen af en stjerne i afstanden 5,8 kpc (19 000 lysår) i en periode på over 6 år har været fulgt af Hubble Space Teleskopet og en række jordbaserede teleskoper. Hidtil er sorte huller af solmassestørrelse kun observeret i binære systemer, hvor det sorte hul og fx en almindelig stjerne kredser om hinanden.

Massen på 7 solmasser er større end det er muligt for en hvid dværg eller en neutronstjerne eller for et binært par af en hvid dværg og en neutronstjerne – eller to neutronstjerner. Og da den øvre grænse for den optiske lysstyrke fra selve linsen er forsvindende lille, er der ikke tale om en almindelig stjerne med denne masse, det er med stor sandsynlighed et sort hul. Massen er i øvrigt tæt på 'toppen' af massefordelingen af de sorte huller, der er kendte fra binære systemer i Mælkevejen.

Dette sorte hul bevæger sig gennem rummet med en fart på 45 km/s på tværs af synslinjen, noget hurtigere end typiske stjerne hastigheder i dette område. Det skal her nævnes at det kun er hastigheden på tværs af synslinjen, der er målt. Det sorte hul er lokaliseret i den Galaktiske skive i en afstand på omtrent 1580 pc mod det Galaktiske center, og omkring 45 pc under den Galaktiske plan. Dette sted befinder sig mellem to spiralarme i Mælkevejen.

Det sorte hul er sandsynligvis resten efter en supernova-eksplosion for måske milliarder år siden, hvor den asymmetriske eksplosionen har givet det sorte hul et 'kick'.

Hubble Space Teleskopet har registreret de små positionsændringer og en række jordbaserede teleskoper har også bidraget med måling af lyskurver, herunder det danske 1,54 m teleskop på ESO's La Silla Observatory i Chile. Den lange observationsperiode på flere år (Einstein tiden er hele  $270,7 \pm 11,2$  døgn) er i sig selv stor, og har givet muligheden for at bestemme mikrolinse parallaxen  $\pi_E = 0,0894 \pm 0,0135$ , idet jo jordobservatorierne har bevæget sig rundt om Solen flere gange i observationsperioden og lyskurven er påvirket af den ændrede sigtelinje til linsebegivenheden. Forstærkningsfaktoren for kildens lys er på hele 369.

Hubble Space Teleskop-målinger af 'lys-tyngdepunktets' afvigelse fra kildens retlinede bane har tilladt en bestemmelse af Einstein-vinklen  $\theta_E = 5,18 \pm 0,51$  mas.

Forventningen er, at der er måske 100 mio. isolerede sorte huller fra tidligere tiders supernova-eksplosioner der bevæger sig rundt i Mælkevejen. Nu er der i hvert fald foreløbig påvist et. Se ref. 15 og 16.

*Tabel: egenskaber ved først opdagede isolerede sorte hul i Mælkevejen*

Egenskaber ved sort hul linsen MOA-11-191/OGLE-11-462	
Egenskab	værdi
Linsemasse $M$	$7,1 \pm 1,3 M_{\odot}$
Linseafstand $D_L$	$1,58 \pm 0,18$ kpc
Einstein ring radius $\theta_E$	$5,18 \pm 0,51$ mas*
Egenbevægelse $\mu$	$5,33 \pm 0,70$ mas/år
Galaktisk position ( $X, Y, Z$ )	$(-4, -1580, -45)$ pc #
Rumhastighed ( $V, W$ )	$(+3, +40)$ km/s ##

\*: mas = milli-buesekunder

#: Galaktisk position i forhold til Solen. X i retning af galaktisk rotation, Y i retning væk fra galaksecentret og Z vinkelret på den galaktiske plan, mod den nordlige galaktiske pol.

##: Rumhastighedskomponenter i forhold til Solen, idet radialhastigheden antages at være 0. V i retning af den galaktiske rotation, W i retning af den galaktiske nordpol.

*Øvelse 12      Beregn massen af det sorte hul med de oplysninger, der du finder i dette afsnit!*

Der er i billedet af kilden for sorte hul-linser muligheden for at se ikke bare en Einsteinring, men også mindre relativistiske ringe med samme centrum. Lyset fra kilden har her været en tur eller flere rundt om

det sorte hul, inden det fortsatte mod observatøren. Lyset har således været tæt på 'det sorte' område, der er defineret ved Schwarzschild-radius, og har således 'testet' det stærke gravitationfelt tæt på det sorte hul. Se ref. 17 for mere om denne mulighed. Se også kommentarerne i begyndelsen af dette dokument, specielt fig. 2, hvor lysstrålen med mindste indfaldsparameter tager en tur om det sorte hul og fortsætter mod den fjerne observatør. Indfaldsparameteren er tæt på værdien  $3\sqrt{3}/2 R_{Sch}$ . Ved mindre indfaldsparametre bliver lyset absorberet af det sorte hul.

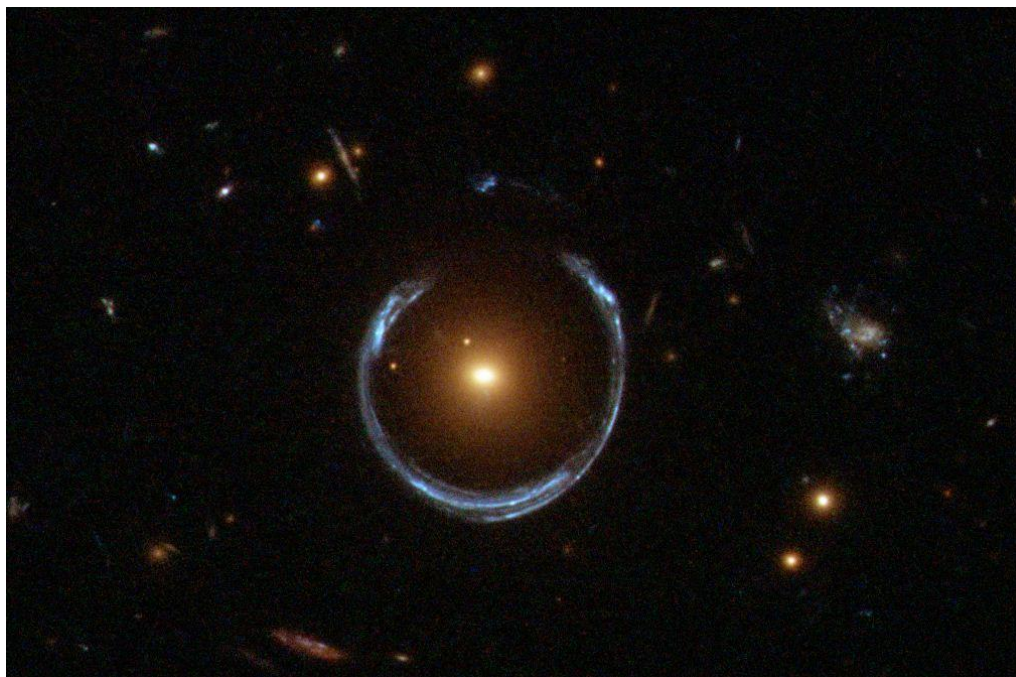
### Einsteinring og massen af en tung galakse – kosmologiske afstande

Vi vil her se på et større objekt, som frembringer en Einsteinring. Data for objektet ses i tabellen nedenfor.

Den kosmiske hestesko*		
Betegnelse	Størrelse	Værdi
$\theta_E$	Einstein vinkel	5,1''
$R_E$	Einstein radius	29,3 kpc
$z_S$	Rødforskydning kilde	2,379
$z_L$	Rødforskydning linse	0,444
$D_S$	Vinkeldiameterafstand kilde	1,68 Gpc **
$D_L$	Vinkeldiameterafstand linse	1,18 Gpc **

\*Se ref. 4.

\*\*Vinkeldiameterafstandene er beregnet fra en kosmologisk model med parametrene  $\Omega_m = 0,3$ ,  $\Omega_\Lambda = 0,7$  og  $H_0 = 70$  km/s/Mpc. Se evt. Ned Wright's kosmologiske beregner på <https://www.astro.ucla.edu/~wright/CosmoCalc.html>. Husk at det er vinkel-diameter afstanden, du skal bruge.



Figur 17: Den kosmiske hestesko – en næsten fuld Einstein-cirkel i stjernebilledet Løven.

Forstørrelsesfaktoren for kildens lysstyrke er vurderet til omkring 50. Kilden er en galakse med en høj rate af nydannede blålige stjerner (starburst galaxy). Linsegalaksen er en tung, lystærk rød galakse (LRG). Faktisk den mest massive linsegalakse, der kendes. De fleste øvrige objekter i dette Hubble-billede fra 2011 er lyssvage galakser. Hesteskoen blev opdaget i 2007 i in Sloan Digital Sky Survey (SDSS).

Vi vil benytte formlen (9) som vi gentager her:

$$R_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \cdot \frac{D_{SL} \cdot D_L}{D_S}}$$

For kosmologiske afstande kan vi ikke beregne  $D_{SL}$  som forskellen på  $D_S$  og  $D_L$ , men må benytte formlen

$$D_{SL} = D_S - D_L \cdot (1 + z_L) / (1 + z_S)$$

idet  $D_S$  er vinkeldiameter-afstanden fra observatør til kilde på tidspunktet hvor lyset udsendes fra kilden, og  $D_L$  er vinkeldiameter-afstanden mellem observatør og linse på tidspunktet, hvor lyset passerer linsen. De to afstande  $D_S$  og  $D_L$  er altså kosmologiske (egen-)afstande målt på forskellige kosmologiske tidspunkter. Vi omregner derfor  $D_L$  til en afstand målt på tidspunktet for lysets afsendelse fra kilden ved først at udregne  $D_L \cdot (1 + z_L)$  – som er en fremskrivning til observatørtidspunktet – og denne deles så med  $(1 + z_S)$  for at tilbageskrive afstanden fra observatørtidspunkt til emissionstidspunkt fra kilden.

Vi beregner derfor  $D_{SL}$  på følgende måde:

$$D_{SL} = D_S - D_L \cdot \frac{1+z_L}{1+z_S} = 1,68 \text{ Gpc} - 1,18 \text{ Gpc} \cdot \frac{1+0,444}{1+2,379} = 1,18 \text{ Gpc}$$

Så isolerer vi  $\frac{4GM}{c^2}$  af formel (9):

$$\frac{4GM}{c^2} = \frac{R_E^2 \cdot D_S}{D_{SL} \cdot D_L}$$

Heri mangler vi blot  $R_E$ :

$$R_E = D_L \cdot \theta_E = 1,18 \text{ Gpc} \cdot 5,1'' = 6,0 \cdot 10^9 \text{ AE} = 29,3 \text{ kpc}$$

Vi indsætter resultaterne:

$$\frac{4GM}{c^2} = \frac{R_E^2 \cdot D_S}{D_{SL} \cdot D_L} = \frac{(29,3 \text{ kpc})^2 \cdot 1,68 \cdot 10^6 \text{ kpc}}{1,18 \cdot 10^6 \text{ kpc} \cdot 1,18 \cdot 10^6 \text{ kpc}} = 1,03 \cdot 10^{-3} \text{ kpc} = 1,03 \text{ pc} = 3,2 \cdot 10^{13} \text{ km}$$

Schwarzhild-radius for linsen er derfor

$$\frac{2GM}{c^2} = 1,6 \cdot 10^{13} \text{ km}$$

Og da Solens Schwarzhild-radius er 2,95 km, bliver linsens masse

$$M = \frac{1,6 \cdot 10^{13} \text{ km}}{2,95 \text{ km}/M_\odot} = 5,4 \cdot 10^{12} M_\odot$$

Dette er massen indenfor Einsteinradius. Hvis galaksen strækker sig længere ud end Einsteinradius, vil denne masse ikke omfatte hele galaksemassen. Men selv med massen indenfor Einstein-radius er der tale om en enorm galaksemasse. Mælkevejen antages fx at have massen  $2,0 \cdot 10^{11} M_\odot$ .

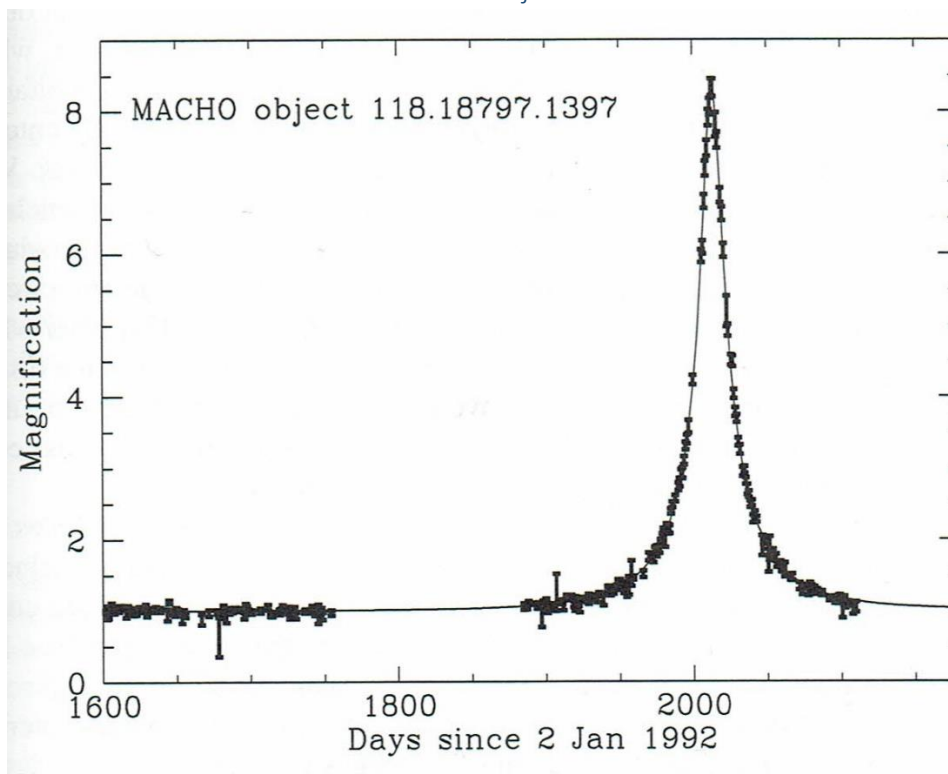


Mere detaljerede modeller af denne galakse har givet en lignende masse. Og mere detaljerede studier af dette system af linsegalakse og kildegalakse – fra det optiske til sub-mm spektralområdet – vil kunne give os viden om betingelserne for stjernedannelse i det tidlige Univers. Desuden har en analyse af den enorme linsegalakse allerede givet os muligheden for at studere samspillet mellem baryoner og mørkt stof i meget massive galakser. En detaljeret modelberegning (2019) giver et indhold af mørkt stof i linsegalaksen på 60-70%, se ref. 5

### Mere komplicerede gravitationslinser

Ovenfor har vi kun set på den mest enkle linsevirkning, nemlig en enkelt linse og symmetri omkring akse observatør-linse. Det er dog langt fra hele sandheden om linsevirkning i praksis. Ofte er der flere linsende objekter, evt. også i serie (multipelt linsede kildeobjekter). Herved bliver modelarbejdet mere kompliceret end de tilfælde, vi har set på her. Det vil imidlertid føre for vidt her at gå ind på dette interessante felt, vi nøjes med at henvise til gode billeder/figurer og tekst i kvant15, se ref. 6, hvor også tidsforskellen mellem de enkelte billeder af kilden – som kan være op til flere år – er omtalt.

#### Opgave 1 – Estimat af massen af linsen MACHO-objekt 118.18797.1397



Figur 18: Lyskurve fra en linsebegivenhed fra det såkaldte MACHO-samarbejde. Figuren viser lysstyrken af en stjerne i Mælkevejens bule der linseforstærket af et mellemliggende objekt. Den lodrette akse viser forstærkningsfaktoren  $a_{tot}$ , se (18). Data er fittet med en kurve der som parametre har  $u_{min} = \beta_{min}/\theta_E$  og  $t_E = \theta_E/\mu$  – som beskriver hvor tæt linsen kommer på sigtelinjen til stjernen og hvor hurtigt linsen bevæger sig hen over himlen relativt til kilden.

Figuren ovenfor viser en linsebegivenhed et par tusind dage efter 1992. Linseforstærkningen af stjernelyset er vist som funktion af tiden. Stjernen befinder sig i Mælkevejens såkaldte bule, og lyset bliver linseforstærket af et mellemliggende objekt.

- Hvilken værdi har  $u_{min} = \beta_{min}/\theta_E$  for linsen? Brug formel (21)
- Hvor lang tid er linsen om at bevæge sig vinklen  $\theta_E$ ? Denne tid betegnes ofte som Einsteintiden  $t_E$ .

Lidt hjælp til dette, fx:

Når linsen har bevæget sig vinklen  $\frac{1}{2}\theta_E$  efter maksimal forstærkning af kildens lys, er

$u = \sqrt{u_{min}^2 + (t/t_E)^2} = \sqrt{(u_{min})^2 + (1/2)^2}$  fordi linsen har bevæget sig en halv Einstein-tid i perioden. Beregn denne værdi af  $u$ .

Indsæt så denne værdi i formlen for den samlede forstærkningsfaktor (18).

Find placeringen af denne værdi på forstærknings-aksen på figur 16. Mål så bredden af lyskurven i denne 'højde' med en lineal og sammenlign med tidsaksen nedenunder. Herved kan du bestemme Einsteintiden  $t_E$  med enheden døgn ('days')

- c) Idet vi antager, at linsen bevæger sig med hastigheden  $V = 200$  km/s relativt til kilden på tværs af synslinjen og er placeret halvvejs mellem Jorden og Mælkevejens centrum, skal du estimere massen af linsen. Afstanden mellem Solen og Mælkevejens centrum er 8,0 kpc (ca. 26000 lysår).

Lidt hjælp til dette:

Vi skal beregne egenbevægelsen  $\mu$  for at kunne beregne Einsteinvinklen  $\theta_E = t_E \cdot \mu$ . Ønsker vi  $\theta_E$  i buesekunder, skal vi beregne egenbevægelsen  $\mu$  i enheden buesekunder pr. døgn, da vi fra figur 14 har Einsteintiden i døgn ('days'). Formlen for egenbevægelsen er

$$\mu = \frac{V}{D_L} \quad \text{formel for egenbevægelse}$$

Her kan vi fx omregne  $V$  til enheden km/døgn, og også omregne  $D_L$  til enheden km. Herved får vi så egenbevægelsen  $\mu$  i enheden radianer/døgn, og omregningen til buesekunder/døgn er let.

Når vi derefter har beregnet Einsteinvinklen  $\theta_E = t_E \cdot \mu$  i buesekunder, og har afstandene til linse og kilde i kpc, kan linsemassen beregnes, fx på samme måde, som linsemassen i Den Kosmiske Hestesko ovenfor eller en af formlerne for  $\theta_E$  i afsnittet om mikrolinsevirkning!

## Referencer:

- Ref. 1: Gravity – An Introduction To Einstein's General Relativity. James B. Hartle, Pearson Education, ISBN 0-8053-8662-9
- Ref. 2: Galactic Astronomy, James Binney and Michael Merrifield, Princeton Series in Astrophysics, 1998,
- Ref. 3: Gravitational Microlensing in the Local Group, Bohdan Paczynski  
Princeton University Observatory 1996 <https://arxiv.org/abs/astro-ph/9604011>
- Ref. 4: <https://arxiv.org/abs/0706.2326>
- Ref. 5: A&A 631, A40 (2019) <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201935042>
- Ref. 6: Kosmiske forstørrelsesglas kvant 2015 4  
<https://www.kvant.dk/upload/kv-2015-4/kv-2015-4-JH-grav-linser.pdf>
- Ref. 7: Beregninger af partikel/foton-baner i Schwarzschild –geometri:  
[https://www.borgeleo.dk/onewebmedia/Fysik/Partikelbev%C3%A6gelse%20i%20st%C3%A6rkt%20tyngdefelt\\_Gamma.pdf](https://www.borgeleo.dk/onewebmedia/Fysik/Partikelbev%C3%A6gelse%20i%20st%C3%A6rkt%20tyngdefelt_Gamma.pdf)
- Ref. 8: <https://scholarscompass.vcu.edu/cgi/viewcontent>
- Ref. 9: [https://www.aanda.org/articles/aa/full\\_html/2022/01/aa39542-20/aa39542-20.html](https://www.aanda.org/articles/aa/full_html/2022/01/aa39542-20/aa39542-20.html)
- Ref. 10: Første opløste microlinse-billeder, The Astrophysical Journal, 871:70 (11pp), 2019 January 20  
<https://iopscience.iop.org/article/10.3847/1538-4357/aeeffb>

Ref. 11:

[Microlens Mass Determinations from Space-based Parallax](#)

[https://etd.ohiolink.edu › rws\\_etd › send\\_file › send](https://etd.ohiolink.edu › rws_etd › send_file › send)

Ref. 12: <https://phys.org/news/2015-04-distance-microlensing-event.html>

Ref. 13: <https://planet.iap.fr/>

Ref. 14: Don on gravitational lensing <https://www.youtube.com/watch?v=4Z71RtwoOas>

Ref. 15: [https://nbi.ku.dk/nyheder/nyheder\\_2022/fritflyvende-sort-hul-opdaget-i-vores-galakse-for-foerste-gang/](https://nbi.ku.dk/nyheder/nyheder_2022/fritflyvende-sort-hul-opdaget-i-vores-galakse-for-foerste-gang/)

Ref. 16: Fritflyvende sort hul detekteret: <https://arxiv.org/abs/2201.13296>

Ref. 17:

[https://www.researchgate.net/publication/318497993\\_Gravitational\\_Lensing\\_in\\_Presence\\_of\\_Plasma\\_Strong\\_Lens\\_Systems\\_Black\\_Hole\\_Lensing\\_and\\_Shadow](https://www.researchgate.net/publication/318497993_Gravitational_Lensing_in_Presence_of_Plasma_Strong_Lens_Systems_Black_Hole_Lensing_and_Shadow)