Note om hodografer for Keplerbaner

Af Børge L. Nielsen, Stenløse gymnasium og HF,
bln@post4.tele.dk

En hodograf er en afbildning, hvor hastighedsvektoren afsættes fra origo i hastighedsrummet. Hastighedsvektoren vil så beskrive en kurve i dette koordinatsystem. Der gælder en ret enkel sætning for disse (hodo-)grafer, som måske ikke er så kendt: *hodograferne er alle cirkler eller en del af en cirkel*. Figurerne 1 og 2 illustrerer dette.

En følge af sætningen ovenfor er følgende simple sammenhænge mellem de to hastighedsvektorer i punkterne P og Q, der ligger over for hinanden som vist på figur 1.

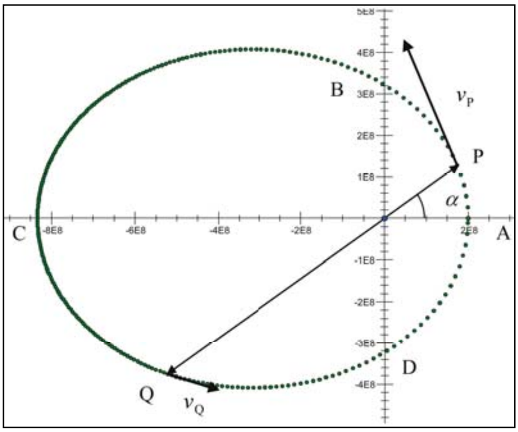
(1) $$\vec{v}_\mathrm{P} + \vec{v}_\mathrm{Q} = 2\vec{v}_\mathrm{m} = \ konst$$

(2) $$\left|\vec{v}_\mathrm{P} - \vec{v}_\mathrm{Q}\right| = 2\left|\vec{v}_\mathrm{c}\right| = konst$$

Den sidst nævnte konstant er diameteren i cirklen på figur 2. Hastighedsvektoren i et vilkårligt punkt af banen kan opfattes som en sum af en konstant komposant $\boldsymbol{v}_\mathrm{m}$ og en drejende komposant $\boldsymbol{v}_\mathrm{c}$ med konstant længde. Drejningsvinklen α for $\boldsymbol{v}_\mathrm{m}$ er den samme som drejningsvinklen for stedvektoren $\boldsymbol{r}$ på nær, at $\boldsymbol{v}_\mathrm{c}$ er 90° foran $\boldsymbol{r}$.

(3) $$\vec{v}(t) = \vec{v}_m + \vec{v}_c(t)$$

Vi forudsætter herefter, at vi har valgt et koordinatsystem, hvor *z*-aksen er ortogonal på baneplanet, og bevægelsen således foregår i *x*-*y*-planet med planeten i origo.



Figur 1. Keplerbane med Jorden i det ene brændpunkt.

Hvis $\boldsymbol{r}$ er givet ved koordinaterne

(4) $$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cdot\cos(\alpha(t)) \\ r\cdot\sin(\alpha(t)) \end{pmatrix}$$

så er $\boldsymbol{v}$ givet ved koordinaterne

(5) $$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{m,x} \\ v_{m,y} \end{pmatrix} + v_c \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\alpha(t)) \\ \cos(\alpha(t)) \end{pmatrix}$$

hvor v_c er størrelsen af $\boldsymbol{v}_\mathrm{c}$. Således er $\boldsymbol{v}_\mathrm{c}$ vinkelret på $\boldsymbol{r}$. Vi har her forudsat, at bevægelsen foregår i positiv omløbsretning. Disse påstande begrundes herefter nedenfor.

Vi begynder med at opskrive accelerationsvektoren i bevægelsen. Ved anvendelse af Newtons 2. lov og gravitationsloven finder vi accelerationen $\boldsymbol{a}$:

(6) $$\vec{F}_{res} = \vec{F}_{grav} \Rightarrow m\cdot\vec{a} = -G\cdot\frac{m\cdot M}{r^3}\cdot\vec{r}$$
$$\Leftrightarrow \vec{a} = -G\cdot\frac{M}{r^3}\cdot\vec{r}$$

Hvordan kan vi så vise, at hodografen altid er en cirkel – eller en del heraf – ved alle bevægelser styret af Newtons gravitationslov eller andre kræfter, der er omvendt proportionale med kvadratet på *r*?

Vi benytter det matematiske udtryk for grafers krumning, se en passende matematikbog. Krumningsradius for en kurve beskrevet ved vektorfunktionen *f* er givet ved følgende udtryk:

(7) $$r_c = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{\left|\vec{f}'(t)\right|^3}{\left|\widehat{\vec{f}'}(t)\cdot\vec{f}''(t)\right|}$$

Her er r_c krumningsradius, *ds* buelængden langs kurven, *dα* drejningsvinklen i forhold til krumningscentrum.

Fysiklærere genkender måske dette udtryk fra formlen $r = v^2/a$ for jævn cirkelbevægelse. Hvis vi kan vise, at krumningsradius for vektorfunktionen $\boldsymbol{v}$ er konstant, viser det, at hodografen altid er en del af en cirkel.

Vi oversætter formlen (7) til det aktuelle tilfælde:

$$(8) \qquad v_c = \frac{dv}{d\alpha} = \frac{\left|\vec{v}'(t)\right|^3}{\left|\hat{\vec{v}}'(t)\cdot\vec{v}''(t)\right|}$$

Da den tidsafledede af ***v*** er accelerationen givet ved (6), mangler vi bare at finde den afledede af accelerationen:

$$(9) \quad \vec{v}''(t) = \vec{a}'(t) = 3G\cdot\frac{M}{r^4}\cdot r'\cdot\vec{r} - G\cdot\frac{M}{r^3}\cdot\vec{v}$$

Skalarproduktet i nævneren i formel (8) udregnes nu nemt:

$$(10) \qquad \hat{\vec{v}}'(t)\cdot\vec{v}''(t) = -G\frac{M}{r^3}\hat{\vec{r}}\cdot\left(3G\frac{M}{r^4}r'\cdot\vec{r} - G\frac{M}{r^3}\cdot\vec{v}\right) = \left(G\frac{M}{r^3}\right)^2\cdot\hat{\vec{r}}\cdot\vec{v}$$

Herved fås så for krumningsradius v_c:

$$(11) \quad v_c = \frac{\left|G\frac{M}{r^2}\right|^3}{\left|\left(G\frac{M}{r^3}\right)^2\cdot\hat{\vec{r}}\cdot\vec{v}\right|} = \frac{G\cdot M}{\left|\hat{\vec{r}}\cdot\vec{v}\right|} = \frac{G\cdot M\cdot m}{\left|\vec{L}\right|}$$

Men skalarproduktet $\hat{\vec{r}}\cdot\vec{v}$ kan omskrives på følgende måde:

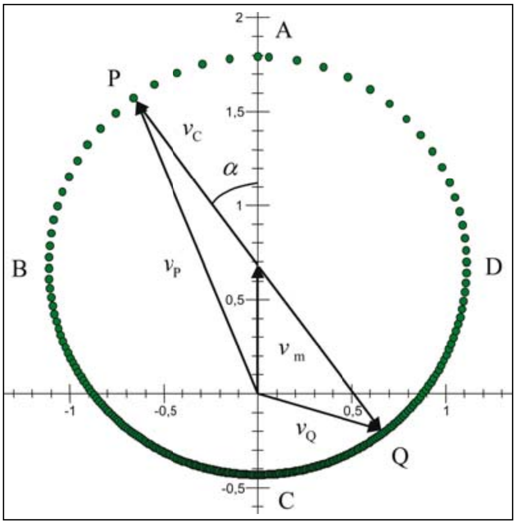
$$(12) \qquad \hat{\vec{r}}\cdot\vec{v} = x\cdot v_y - y\cdot v_x = \text{arealhastighed} = \text{konstant}$$

Denne arealhastighed er netop konstant for en centralkraft, som det jo let kan vises ved at differentiere (12) og udnytte, at accelerationen er rettet modsat ***r***. Altså er krumningsradius på figur 2 konstant, og hastighedsvektorens "pilespids" kører rundt i en cirkel! Det sidste lighedstegn i (11) følger af, at impulsmomentet ***L***'s størrelse er

$$(13) \qquad \left|\vec{L}\right| = \left|m\cdot\vec{r}\times\vec{v}\right| = m\cdot\left|x\cdot v_y - y\cdot v_x\right|$$

Men hvorfor er så drejningsvinklen for vektoren $\boldsymbol{v}_c$ den samme som for stedvektoren ***r*** ?

Det indses let ved at bemærke, at accelerationsvektoren ***a*** er tangentvektor til kurven på fig.



Figur 2. Hodografen for bevægelsen i figur 1.

2 (ligesom ***v*** er tangentvektor til banekurven), og accelerationsvektoren er parallel med stedvektoren ***r***. Drejningsvinklen for stedvektoren er derfor den samme som drejningsvinklen for accelerationsvektoren – som hele tiden er vinkelret på vektoren $\boldsymbol{v}_c$. Derfor må vektoren $\boldsymbol{v}_c$ dreje den samme vinkel.

Og endelig: hvorfor ligger punkterne P og Q overfor hinanden som vist på figur 2?

To punkter, der ligger diagonalt overfor hinanden i en cirkel, vil have parallelle tangentvektorer. Men tangentvektorerne er accelerationsvektorer, og disse er parallelle med stedvektorerne ifølge formel (6). Derfor vil stedvektorerne hørende til punkterne P og Q på figur 2 være parallelle, dvs. de må ligge overfor hinanden på Keplerbanen som vist på figur 1.

For hyperbelbevægelser vil cirklen på figur 2 ikke indeholde begyndelsespunktet (0,0). Desuden vil det kun være en del af cirklen, der gennemløbes når banebevægelsen foregår. Hastighederne til tidspunkterne +∞ og -∞ vil være slut- og begyndelses-tangentvektorer til cirkeludsnittet.

For en parabelbevægelse vil hodografen være en fuld cirkel – på nær punktet (0,0). De nærmere begrundelser for disse påstande overlades til den interesserede læser.

Fysik