

Huller i rummet

Børge L. Nielsen, Stenløse Gymnasium.

Det har vist sig, at de sorte huller kan bruges som forklaringsmodel på ganske mange astronomiske fænomener - lige fra supernovarester til aktive galaksekerne i kvasarer og jets fra radiogalakser. Det kunne derfor måske være interessant at se på, hvordan disse huller påvirker sine omgivelser.

Hullets egenskaber kan karakteriseres ved kun 3 parametre, nemlig hullets masse M , hullets impulsmoment J og endelig hullets elektriske ladning Q . Nedenfor vil dog i stedet for impulsmomentet J blive anvendt impulsmoment pr. masseenhed $a = J/M$.

Det er velkendt, hvordan en punktmasse med massen M i Newtons gravitationsteori styrer bevægelsen af en partikel i frit fald i tyngdefeltet fra M . Når det alligevel nævnes her, er det for at have Newtons teori at sammenligne med, når der nedenfor beskrives de tilsvarende bevægelsesligninger ved et roterende, evt. elektrisk ladet sort hul - dvs. Einsteins teori.

For enkelhedens skyld antager vi, at partiklen, hvis bevægelse vil studeres, har en masse, der er uendeligt meget mindre end M , således at tyngdepunktet for systemet af de to masser har massemidtunkt i det punkt, hvor massen M er placeret. I dette punkt er $r = 0$. I polære koordinater er bevægelsesligningen for partiklen herefter

Frit fald i Newtons gravitationsteori:

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} &= -G \frac{M}{r^2} + r \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \\ \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= -\frac{2}{r} \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \end{aligned}$$

Her er det forudsat, at den polære koordinat θ er 90° , således at baneplanen er $x - y$ planen. Begyndelsesbetingelser for integrationen af (1) er begyndelses-sted (r_0, φ_0) og begyndelseshastighed $(dr/dt, d\varphi/dt)_0$.

Baneparameteren t i (1) er den Newtonske universelle tid.

Løsningerne til (1) er keglesnit, nemlig ellipser, parabler og hyperbler med massen M i det ene brændpunkt.

Bevægelseskonstanter er partiklens impulsmoment pr. masseenhed j , partiklens mekaniske energi pr. masseenhed e , samt konstanten $\theta = \pi/2$

Disse - altså j og e - er defineret ved:

$$(2) \quad j = r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} \quad e = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] - G \frac{M}{r}$$

Ellipsebaner har $e < 0$, parabelbaner $e = 0$ og hyperbelbaner $e > 0$.

Nu til en partikels bevægelse ved et sort hul. Det ville føre for vidt i alle detaljer her at beskrive bevægelsesligningerne, men følgende beskrivelse kan antyde disse:

Hvis de såkaldte Kerr-Newman koordinater (koordinater, der er faste i forhold til "fixstjernerne") benyttes, opnås relativt enkle bevægelsesligninger.

Som baneparameter benyttes den tid t , som en iagttagere i hvile fjernt fra hullet måler på sit ur. (Egentlig kunne egentiden for partiklen - tiden målt på et ur, der følger bevægelsen - også bruges som baneparameter, men ulempen er, at man så ikke kan regne på foton-baner, hvor tilvæksten i egentiden er 0)

Bevægelsesligningerne opskrives - som ovenfor - lettest i polære koordinater. Problemet er nu 3-dimensionalt, idet det sorte hul er aksialsymmetrisk om sin rotationsakse (i modsætning hertil beskriver (1) et centralsymmetrisk bevægelsesproblem). Der vil derfor nødvendigvis være tre 2. ordens bevægelsesligninger, nemlig én for hver koordinat r, φ, θ . Ligningerne for frit fald i tyngdefeltet er af typen-

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} &= \sum_{i,j} F_{ij} \cdot \frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{dx_j}{dt} \\ \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= \sum_{i,j} G_{ij} \cdot \frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{dx_j}{dt} \\ \frac{d^2 \theta}{dt^2} &= \sum_{i,j} H_{ij} \cdot \frac{dx_i}{dt} \cdot \frac{dx_j}{dt} \end{aligned}$$

Her er x_i, x_j en af rum-tidskoordinaterne r, φ, θ, t . Størrelserne F_{ij}, G_{ij} og H_{ij} er alle funktioner af r, θ (men ikke φ - hvilket viser hullets aksialsymmetri), samt af rotationsparameteren a , den elektriske ladning Q for hullet og hullets masse M . Der er 20 af disse funktioner, der er forskellige fra 0. Til sammenligning er der i ligningerne (1) kun 3 funktioner af denne art.

(Faktisk er ligningerne (3) lidt mere komplicerede, hvis hullets elektriske ladning er forskellig fra 0, idet den elektromagnetiske felt-tensor da også indgår i ligningerne).

De detaljerede bevægelsesligninger kan f.eks. findes i ref.3.

Af bevægelseskonstanter er der 4, nemlig partiklens hvilemasse m , impulsmoment-projektion på rotationsaksen j_z , partiklens energi (pr. masseenhed) e og endelig en konstant k_θ associeret med bevægelsen i θ -koordinaten.

Inden vi ser på numeriske løsninger til (3), vil vi først notere os nogle egenskaber ved det sorte hul:

Det sorte hul har en begivenhedshorisont ved en r -værdi givet ved

$$(4) \quad r = r_{\text{hor}} = \frac{1}{2} r_g + \sqrt{\left(\frac{1}{2} r_g \right)^2 - (a^2 + Q^2)}$$

Her er $r_g = 2GM/c^2$ den såkaldte gravitationelle radius. For et hul med massen 1 solmasse er denne ca. 3 km. Rotationsparameteren a er hullets impulsmoment pr. masseenhed, delt med lysets fart c . Endelig størrelsen Q hullets elektriske ladning, delt med konstanten $c^2/\sqrt{2G \cdot k_c} = 8,22 \cdot 10^{16} \text{ C/m}$, hvor k_c er Coulomb-konstanten. Størrelsen Q har derfor dimensionen længde - ligesom a .

Hvis $r > r_{\text{hor}}$, er det muligt at undslippe tyngdekrafterne fra hullet. Hvis derimod $r < r_{\text{hor}}$, vil alt bevæge sig mod mindre r -værdier, selv lys vil ikke kunne undslippe - derfor betegnelsen *sort hul*: ingen information slipper ud fra dette område af rummet.

Af formel (4) ser vi, at uligheden

$$(5) \quad a^2 + Q^2 \leq \left(\frac{1}{2}r_g\right)^2$$

må være opfyldt, hvis der er en begivenheds-horisont - og dermed et sort hul. Hvis (5) *ikke* er opfyldt, vil det sorte hul ikke kunne eksistere. Dannelsen af hullet er forhindret af for kraftige centrifugalkræfter og/eller for stærke elektriske frastødningskræfter.

Uligheden (5) giver en øvre grænse for den elektriske ladning på hullet. Antager vi, at hullets masse er 1 solmasse, finder vi

$$(6) \quad Q \leq \frac{1}{2}r_g \cdot \frac{c^2}{\sqrt{2G \cdot k_c}}, \text{ dvs. } Q \leq \frac{1}{2} \cdot 3 \text{ km} \cdot 8,22 \cdot 10^{16} \text{ C/m} = 1,2 \cdot 10^{20} \text{ C} \text{ for } M = M_{\text{sol}}$$

En ganske betragtelig elektrisk ladning! Denne vil "støvsuge" rummet i nærheden af hullet for ladning af modsat fortegn, og derfor er der ingen, der regner med, at sorte huller har elektrisk ladning af betydning.

Uligheden (5) giver ligeledes en øvre grænse for rotations-parameteren a :

$$(7) \quad a \leq \frac{1}{2}r_g$$

Denne ulighed giver en øvre grænse for hullets *impulsmoment* og dermed også en øvre grænse for hullets *rotationsfrekvens*. Hullet roterer med frekvensen

$$(8) \quad f = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{a \cdot c}{r_{\text{hor}}^2 + a^2}$$

Begrænsningen (7) giver følgende *maksimal* frekvens for et hul med massen 1 solmasse (idet $r_{\text{hor}} = \frac{1}{2}r_g$, se (4) med $Q = 0$ og $a = \frac{1}{2}r_g$):

$$(9) \quad f_{\text{max}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{c}{r_g} \Rightarrow f_{\text{max}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{3,0 \cdot 10^5 \text{ km/s}}{3 \text{ km}} = 15,9 \text{ kHz} \text{ for } M = M_{\text{sol}}$$

På grænsen af det hørbare frekvensområde! Mere massive huller roterer langsommere, f.eks. vil et hul med en masse på $2 \cdot 10^9$ solmasser have en *minimal* rotationsperiode på 35 timer!

Hullet har desuden den egenskab, at kommer man tæt på det, vil man være *tvunget til at følge dets rotation*. Hullet trækker rummet med rundt! Grænsen, indenfor hvilken alle materielle legemer er tvunget til at følge hullets rotation, kaldes *den statiske grænse*. Denne er bestemt ved

$$(10) \quad r = r_{\text{stat}} = \frac{1}{2}r_g + \sqrt{\left(\frac{1}{2}r_g\right)^2 - Q^2 - a^2 \cdot \cos^2\theta}$$

Det ses, at r_{stat} er større end r_{hor} givet ved (4) undtagen ved polerne ($\theta = 0^\circ$ og $\theta = 180^\circ$), hvor de er sammenfaldende. Området mellem begivenhedshorisonten og den statiske grænse kaldes *ergosfæren*. Denne ses illustreret på fig. 1.

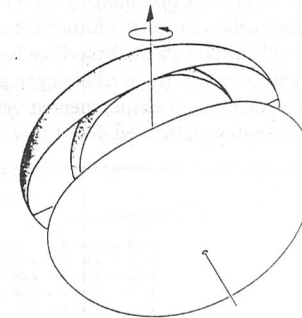


Fig. 1: Figuren viser området mellem den statiske grænse og begivenhedshorisonten. Området kaldes ergosfæren. Figuren er fra ref. 1

Det er eksistensen af dette område, der muliggør, at det sorte hul kan overføre en del af sin rotationsenergi til sine omgivelser. Det var R. Penrose, der først påpegede dette: en partikel, der kommer ind i ergosfæren, deles i to, og den ene placeres i en bane med *negativ* energi. Herved får den anden et energitilskud, der muliggør, at den kan forlade ergosfæren med *mere* energi, end den oprindelige partikel besad. Til gengæld er den efterladte del fortabt: den vil for evigt forblive oplugt af hullet. Processen kaldes *Penrose-processen*. Energien, der udvindes, er en del af hullets rotationsenergi.

En astrofysisk mere interessant måde at udtrække rotationsenergi fra det sorte hul er den såkaldte *Blanford-Znajek proces*. Nogle roterende sorte huller antages at være omgivet af en *tilvækst-skive* (eng.: accretion disk) af gas, en skive af gas, der roterer om det sorte hul. Ski-

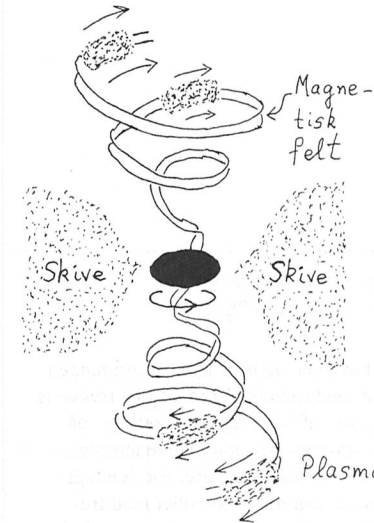


Fig. 2: Plasma fra tilvækstskiven accelereres til høje hastigheder langs de spiralformede magnetiske feltlinier, der "piskes" rundt af hullets rotation

ven er så varm, at tilstandsformen er *plasma*. I denne plasma er der "fanget" magnetiske felter - medbragt fra det interstellare rum. Når denne plasma falder ned i det sorte hul, vil de magnetiske feltlinier stadig "stikke ud" af hullet. Hullet vil forsøge at slippe af med magnetfeltet, men forhindres heri af den elektrisk ledende plasma i skiven, der "presser" feltet ind mod hullet. På grund af hullets rotation, vil disse feltlinier blive *tvunget med rundt*, og vil blive snoet til en spiral - se fig. 2. Plasma, der befinder sig i feltets område, vil "glide" langs disse magnetiske feltlinier og derved blive accelereret til betydelige hastigheder - på denne måde dannes formodentlig de *jets*, der ses at strømme ud fra de såkaldte radiogalakser. *Retningen* af disse jets er ifølge denne model identisk med retningen af det sorte huls rotations-akse. Læs mere om dette spændende emne i ref. 2! (God bog - ikke mange formler)

Men nu tilbage til bevægelses-ligningerne (3). Disse er vanskelige at løse analytisk, men en computer kan hurtigt give numeriske løsninger. Begyndelsesbetingelser for integrationen af (3) er

naturligvis $(r, \varphi, \theta)_0$ og $(dr/dt, d\varphi/dt, d\theta/dt)_0$ - se iøvrigt ref.3.

På fig.3 ses en serie på 9 "fotonbaner" (eller baner for partikler med lyshastigheden) ved et ikke-roterende sort hul. Banerne er forsynede med tidsmærker i form af punkter. Er hullets masse 1 solmasse, er tidsintervallet $\Delta t = 2r_g / c = 2 \cdot 3 \text{ km} / 3,0 \cdot 10^8 \text{ km/s} = 20 \mu\text{s}$. Begivenhedshorisonten er tegnet som en kugle. Figuren viser den kraftige afbøjning af lyset tæt ved det sorte hul. Fotonbane nr.8 ender i en jævn cirkelbevægelse om hullet - fotonbane nr.9 ender på horisonten og går i stå her. Ved at sammenligne tidsmærker på de forskellige baner, ses den tidsforsinkelse, som baner tæt ved horisonten kommer ud for. Både afbøjningen af lys og tidsforsinkelsen af signaler, der passerer gennem tyngdefelter, er eksperimentelt verificerede indenfor og udenfor solsystemet - og giver fin overensstemmelse med denne teori!

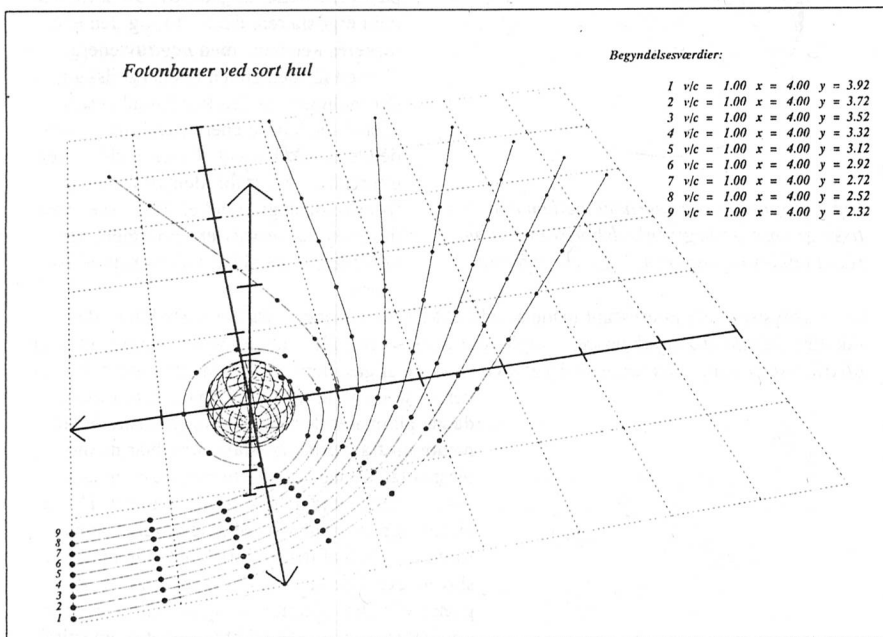


Fig.3: Figuren viser 9 fotonbaner, der passerer tæt på et sort hul. Tidsintervallet mellem markerede punkter er $\Delta t = 2r_g / c$.

Figur 4 (næste side) viser tilsvarende 7 fotonbaner, der bevæger sig mod rotationsretningen for det sorte hul. (hullet roterer med uret). Hullet roterer med (numerisk) maksimal frekvens, se uligheden (7). Man ser, hvorledes banerne 4 - 7 tvinges til at følge hullets rotation - på trods af den oprindelige bevægelse. Alle disse 4 fotoner bevæger sig mod begivenhedshorisonten (der er tegnet som en cirkel) uden nogensinde at nå denne, set på uret for den iagttagere, der sidder i hvile langt fra hullet. Fotonerne vil rotere sammen med hullet med frekvensen (8). Ergosfærens udstrækning i x-y-planen er ifølge (10) bestemt ved $r = r_g$, altså

netop kantlængden på et kvadrat på figuren. Inden for denne r -værdi følger alle baner hullets rotationsretning.

En astronaut, der i sit rumskib falder mod horisonten, vil ligeledes blive tvunget med rundt pga. hullets rotation. Set fra den fjerne iagttagere vil astronauten til evig tid rotere om hullet. Derimod ser astronauten anderledes på det: på astronautens eget ur vil der kun gå kort tid, før begivenhedshorisonten passerer - og den uendelige afstand, som den fjerne iagttagere ser astronauten tilbagelægge (den evige rotation), vil for astronauten kun være en kort afstand, som hurtigt overvindes. Astronauten vil ende sine dage før singulariteten i $r = 0$ nås, idet tidevandskræfter vil have flået både rumskibet og ham/hende til atomer forinden!

Endelig viser figur 5 og 6 (nedenfor), hvorledes hullets rotation påvirker en bane, der passerer over polerne - baneplanen drejer med i hullets rotationsretning, omend væsentligt langsommere end hullet. Tilsvarende effekter har jorden formodentlig på satellitbaner, der passerer over polerne - men effekten er naturligvis forsvindende lille i forhold til den her viste. Effekten kan beskrives som virkningen af Corioliskræfter på den bevægede partikel - idet hullet trækker inertialsystemerne med rundt, således at det anvendte statiske system ikke er et inertialsystem.

Referencer:

1. Gravitation - Misner, Thorne og Wheeler 1973. Freeman, San Francisco.
2. Black holes and Time Warps - Kip S. Thorne 1994 W.W. Norton, New York - London
3. Rummet og tiden - og de sorte huller - henvendelse til undertegnede

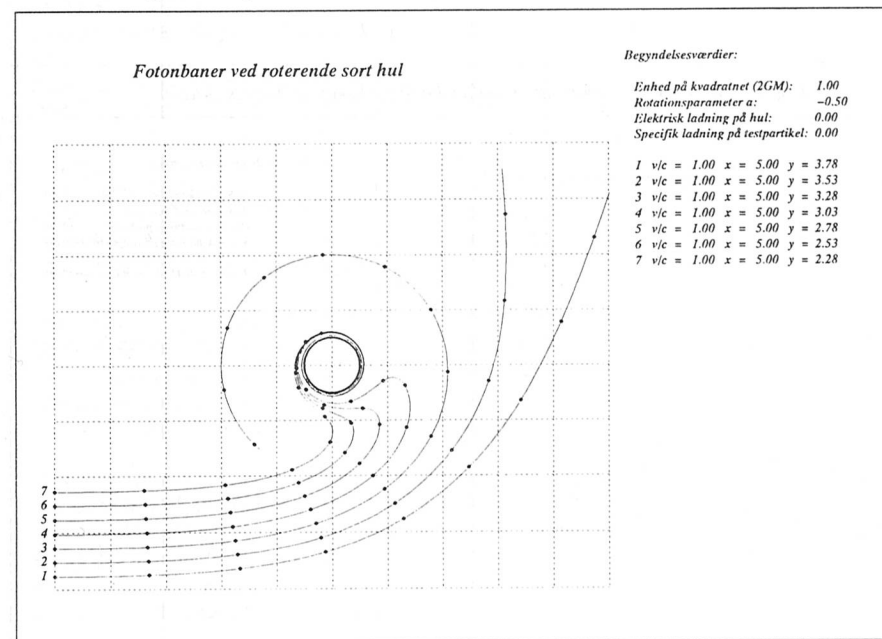


Fig.4: Figuren viser, hvordan det roterende sorte hul påvirker 7 fotoner, der bevæger sig mod hullets rotationsretning.

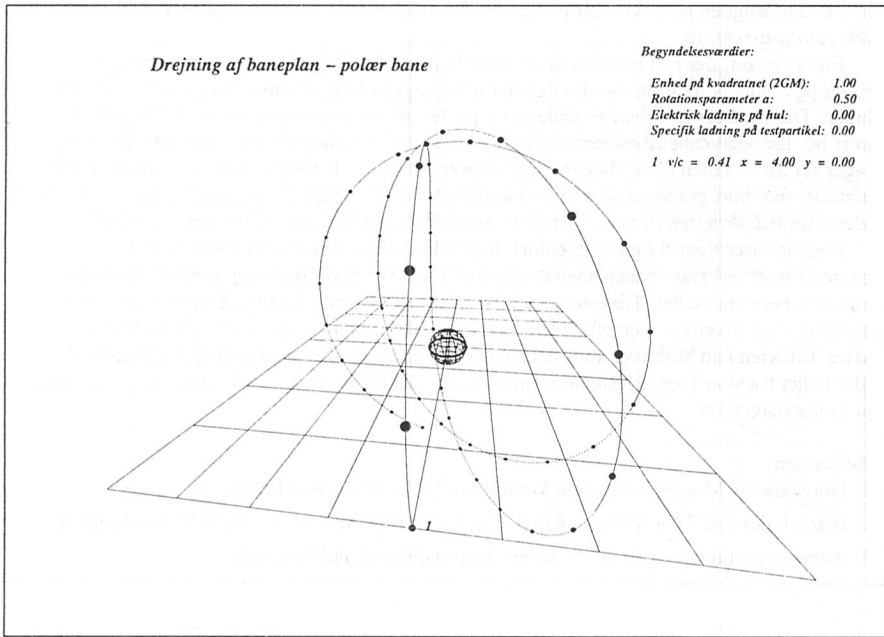


Fig.5: Figuren viser, hvordan en polær bane påvirkes af hullets rotation

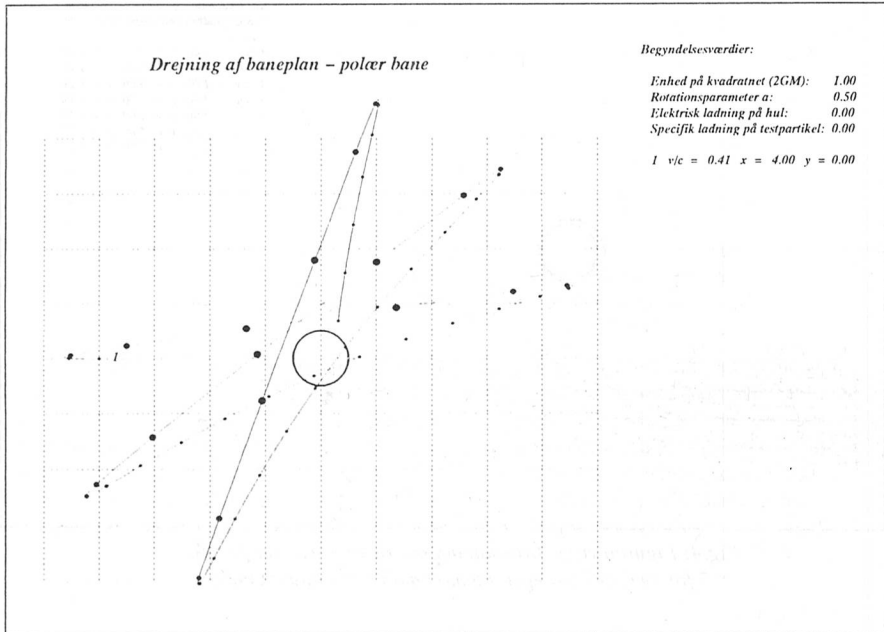


Fig.6: Figuren viser samme bane som fig.5 - men nu set fra et punkt på z-aksens pos. del