

Hvorfor bevæger lyset sig langsommere i fx glas og vand end i det tomme rum?

- om fysikken bag til brydningsindekset

Artiklen er udarbejdet/oversat ud fra især ref. 1

- fra borgeleo.dk

Det korte svar:

det indkommende elektromagnetiske kildefelt tvinger elektronerne i stoffets atomer i svingninger, og de accelererede elektroner udsender en stråling, der interfererer med det indkommende kildefelt. Dette resulterende felts fasehastighed i stoffet bliver hermed mindre end lysets fart i det tomme rum - her forudsat at brydningsindekset n er større end 1.

Når frekvensen af det ydre kildefelt nærmer sig (nedefra) til en resonansfrekvens for materialet, vil brydningsindekset vokse i takt med, at de atomare elektroners amplituder vokser. Herved forøges 'svarfeltet' fra stoffet, og fasehastigheden falder yderligere.

Strålingsbidraget fra de enkelte kilder (indkommende kildefelt og accelererede elektroner) bevæger sig med lysets fart i det tomme rum.

Det mere detaljerede svar:

Vi regner på et simpelt eksempel, hvor et ydre kildefelt der kommer ind langs z-aksen bringer atomernes elektroner i svingninger i en tynd skive i x-y-planen. Ladningernes acceleration bevirker, at de udsender stråling - som svingende elektroner i en antenne. Vi beregner det samlede felt fra alle disse accelererede ladninger på den anden side af skiven, og ser på interferensen med det oprindelige kildefelt. Det inducerede felt er faseforskuet -90° i forhold til det ydre kildefelt. Herved bliver fasehastigheden for det resulterende felt lavere end lysets fart i det tomme rum c i det tilfælde, hvor brydningsindekset er større end 1.

Afstanden mellem atomerne antages så stor, at den udsendte accelerationsstråling ikke påvirker de øvrige atomer.

Kildefeltet beskriver vi ved formlen

$$E_s(t, z) = E_0 \cdot \cos \left[\omega \cdot \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] \quad (1)$$

Her er E_0 kildefeltets amplitude, ω er feltets vinkelfrekvens, hvor $\omega = 2\pi \cdot f$ med f som feltets frekvens.

Kildefeltet 'ruller' ind i retning af z-aksen med lysets fart c . Holder vi nemlig fasen $\omega \cdot \left(t - \frac{z}{c} \right)$ konstant, må $\Delta t - \frac{\Delta z}{c} = 0$, hvoraf $v_z = \frac{\Delta z}{\Delta t} = c$. Vi ser altså, at feltets fasehastighed er c .

Dette felt tvinger atomernes elektroner i svingninger med samme frekvens som kildefeltet.

En elektrisk ladning, der accelereres, udsender i stor afstand fra ladningen stråling efter formlen

$$E_x(t) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 \cdot c^2} \cdot \frac{a_x(t - \frac{r}{c})}{r} \quad (2)$$

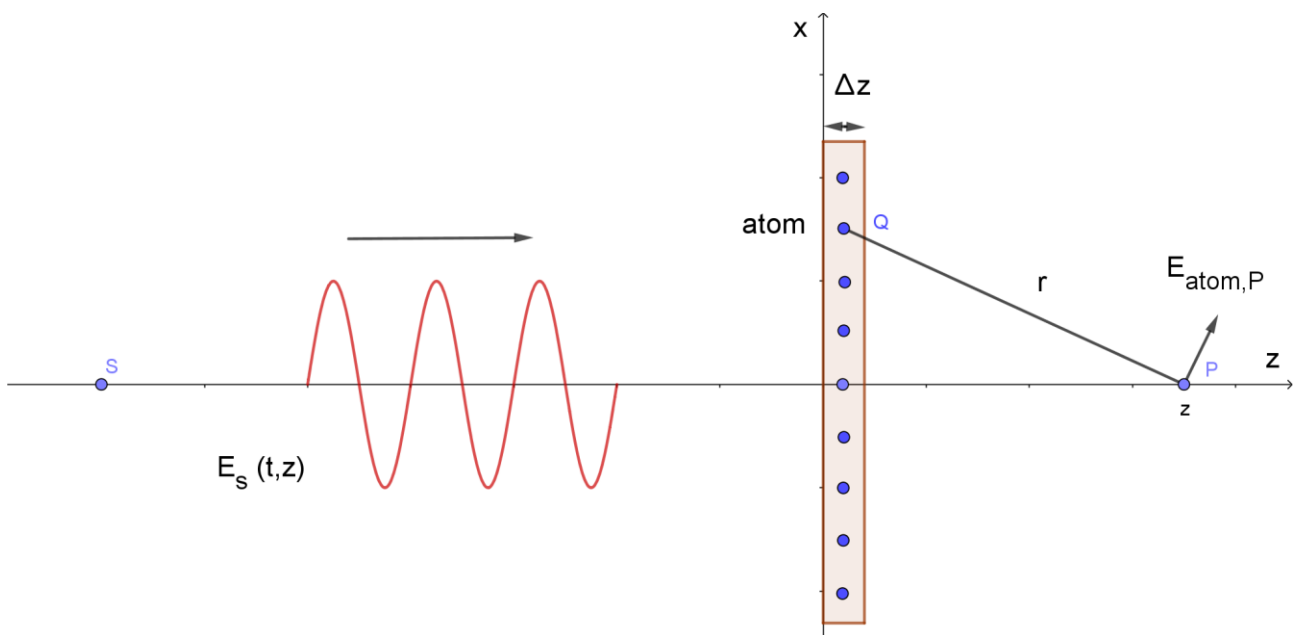
Her er $a_x(t - \frac{r}{c})$ accelerationen vinkelret på sigtelinjen, til tidspunktet $t - \frac{r}{c}$, hvor vi har trukket den tid, feltet har brugt for at nå distancen r , fra tiden t . Det er altså accelerationen 'en gang i fortiden' der skaber feltet i nutiden.

Det er summen af alle disse inducerede felter, der ved interferens med kildefeltet giver et felt, der har en fasehastighed c/n , hvor n brydningsindekset ved kildefeltets frekvens. Her ser vi dog bort fra, at de inducerede felter også vil påvirke atomerne - i hvert fald i tætte materialer. Så vores forsimplede beskrivelse gælder i første omgang gasarter, hvor der er langt mellem atomerne. Ikke desto mindre giver dette forklaringen på den lavere fasehastighed, som vi skal se.

Alle felterne - både kildefeltet og de inducerede felter - udbredes med lysets fart i det tomme rum c også inde i materialet.

Vi vil først se på, hvordan en ændret fart for det resulterende felt viser sig som en faseændring i forhold til kildefeltets fase - og senere se på, hvordan denne faseændring kan udtrykkes ved atomare parametre.

På figur 1 nedenfor ses kildefeltet 'rulle' ind fra venstre for den tynde skive, og efter skiven vil i punktet P det samlede felt være kildefeltet plus feltet fra alle de accelererede ladninger/elektroner. Det samlede felt i punktet P vil være faseforskuet i forhold til hvad kildefeltet ville være uden skivens tilstedeværelse. Hvis kildefeltet passerer materialet med lysets fart c , vil passagetiden være $\frac{\Delta z}{c}$. Hvis derimod feltets fart kun er $\frac{c}{n}$, vil passagetiden være $\frac{\Delta z}{c/n} = \frac{\Delta z}{c} \cdot n$.



Figur 1: Kildefeltet accelererer alle ladninger op/ned. Ladningerne udsender derfor stråling. Vi vil finde det samlede felt i punktet P.

Altså vil den ekstra tid for passagen af skiven med bredden Δz være

$$\Delta t = \frac{\Delta z}{c} \cdot n - \frac{\Delta z}{c} = (n - 1) \cdot \frac{\Delta z}{c} \quad \text{forsinkelse} \quad (3)$$

For at beskrive det resulterende felt i punktet P, trækker vi tiden Δt fra t i formel (1):

Herved får vi det resulterende felt på højre side af skiven:

$$E_{res}(t,z) = E_0 \cdot \cos \left[\omega \cdot \left(t - \Delta t - \frac{z}{c} \right) \right] \quad (4)$$

som vi omskriver på følgende måde:

$$E_{res}(t,z) = E_0 \cdot \cos \left[\omega \cdot \left(t - \frac{z}{c} \right) - \omega \cdot \Delta t \right]$$

Vi anvender nu følgende approksimation, der gælder, til første orden i h :

$$\cos(\text{fase} + h) \approx \cos(\text{fase}) + \cos'(\text{fase}) \cdot h = \cos(\text{fase}) - \sin(\text{fase}) \cdot h$$

Anvendt på feltet ovenfor, fås

$$\begin{aligned} E_{res}(t,z) &= E_0 \cdot \cos \left[\omega \cdot \left(t - \frac{z}{c} \right) - \omega \cdot \Delta t \right] \\ &\approx E_0 \cdot \cos \left[\omega \cdot \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] - E_0 \cdot \sin \left[\omega \cdot \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] \cdot (-\omega \cdot \Delta t) \\ &= E_s + E_0 \cdot \sin \left[\omega \cdot \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] \cdot \omega \cdot \Delta t \end{aligned}$$

idet vi forudsætter, at $\omega \cdot \Delta t$ er et lille tal. Indsætter vi nu udtrykket (2) i stedet for Δt , finder vi endelig udtrykket

$$E_{res}(t,z) \approx E_s + E_0 \cdot \sin \left[\omega \cdot \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] \cdot \omega \cdot (n-1) \cdot \frac{\Delta z}{c}$$

Feltet fra alle ladningerne er det sidste led i denne formel, forudsat at beskrivelsen af ladningernes virkning på kildefeltet blot er en faseforskydning af kildefeltet (vi har her set bort fra evt. absorption).

Vi har så:

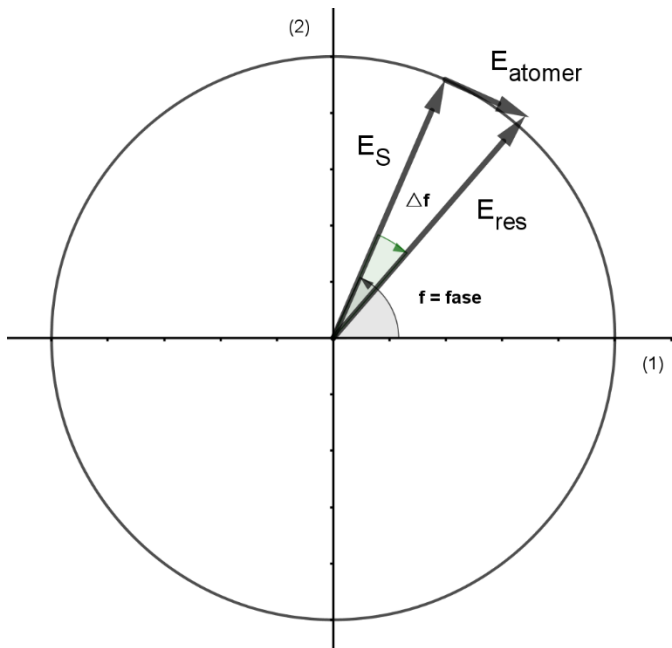
$$E_{res}(t,z) = E_s + E_{\text{alle atomer}}$$

hvor

$$E_{\text{alle atomer}} \approx E_0 \cdot \sin \left[\omega \cdot \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] \cdot \omega \cdot (n-1) \cdot \frac{\Delta z}{c} \quad (5)$$

Udnytter vi formlen $\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$, er det resulterende felt altså:

$$E_{res}(t,z) \approx E_0 \cdot \cos \left[\omega \cdot \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] + E_0 \cdot \cos \left[\omega \cdot \left(t - \frac{z}{c} \right) - \frac{\pi}{2} \right] \cdot \omega \cdot (n-1) \cdot \frac{\Delta z}{c}$$



og vi ser heraf, at det inducerede felt er faseforskudt -90° i forhold til det ydre kildefelt. Dette vises på figur 2, hvor radius i cirklen er amplituden E_0 på det ydre kildefelt. De fysiske felter er projektionerne af vektorerne på 1. akse. Det bemærkes (igen), at det inducerede felt skal være svagt i forhold til kildefeltet, sådan at det resulterende felt har samme amplitude som det ydre kildefelt (til 1. orden), under forudsætning af, at der ikke er absorption eller forstærkning af strålingen. Det elektriske felt E_{res} er blot faseforskudt i forhold til kildefeltet E_S .

Figur 2: faseforskydningen $\Delta f = \omega \cdot (n - 1) \cdot \frac{\Delta z}{c}$ af det elektriske felt efter passagen af skiven med tykkelsen Δz

Vi vil herefter prøve at beregne $E_{alle\ atomer}$ i punktet P direkte ud fra formel (2), idet vi adderer bidragene fra alle atomer. Vi forudsætter, at alle atomers bevægelse er i fase og med samme amplitude, styret af det ydre kildefelt.

Vi antager, at alle atomerne udfører harmoniske svingninger omkring en ligevægtsposition i fase med det ydre kildefelt, alle med samme amplitude x_0 . Derfor kan vi skrive:

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Vinkelfrekvensen ω er som nævnt styret af det ydre kildefelt.

Heraf findervi:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -x_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

og

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = -x_0 \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

For at finde det inducerede elektriske felt i punktet P, skal vi bruge accelerationens komponent vinkelret på linjen QP.

$$E_P(t) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0\cdot c^2} \cdot \frac{a_x(t-\frac{r}{c})}{r}$$

Her er q den elektriske ladning for den accelererede ladning, ϵ_0 er vakuumpemittiviteten. Vi har dog her udeladt en cosinusfaktor, der skal projicere accelerationen ind på en normal til sigtelinjen mellem Q og P.

Indsætter vi så $a_x\left(t - \frac{r}{c}\right)$ fra accelerationsudtrykket ovenfor, fås

$$E_P(t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\cdot c^2} \cdot \frac{x_0 \cdot \omega^2 \cdot \cos\left[\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]}{r}$$

Vi skal nu addere felterne fra alle atomerne i hele skiven. Det bemærkes, at cosinus-leddet vil skifte fortegn mange gange for voksende værdier af r - fordi det er feltet fra fjernere atomer, og feltet i punktet P til tiden t stammer altså fra atomer i alle mulige forskellige faser af accelerationen bagud i tiden.

Detaljerne i udledningen af det samlede felt fra atomerne vil ikke blive gennemgået her, men resultatet er

$$E_{P,alle\ atomer}(t) = \frac{\eta \cdot q}{2\epsilon_0 \cdot c} \cdot x_0 \cdot \omega \cdot \sin\left[\omega \cdot \left(t - \frac{z}{c}\right)\right]$$

Her er η antallet af ladninger pr. arealenhed af skiven. Dette felt er (også af symmetri Grunde) parallel med x-aksen, se figur 1.

Det er måske ikke så mærkeligt at vi får sinus når vi integrerer cosinus!

Hvis vi indfører størrelsen N som er antallet af ladninger pr. volumenenhed, så er

$$\eta = N \cdot \Delta z$$

Dette indføres i udtrykket for feltet ovenfor:

$$E_{alle\ atomer}(t) = \frac{N \cdot \Delta z \cdot q}{2\epsilon_0 \cdot c} \cdot x_0 \cdot \omega \cdot \sin\left[\omega \cdot \left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \quad (6)$$

Vi mangler nu bare sammenhængen mellem x_0 og kildefeltets E_0 inden vi kan opstille et udtryk for brydningsindekset, der indgår i ligning (5).

Vi ser nøjere på ladningernes bevægelse under påvirkning af den elastiske kraft proportional med afstanden til ligevægtssedet:

$$F_{elastisk} = -m \cdot \omega_0^2 \cdot x$$

Her er ω_0 egen(vinkel)frekvensen for den harmoniske svingning, se nedenfor.

Hvis dette er den eneste kraft, får vi bevægelsesligningen $m \cdot x''(t) = -m \cdot \omega_0^2 \cdot x$, og løsningen er

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$$

Altså en harmonisk svingning med vinkelfrekvensen ω_0 med amplituden x_0 som ikke er fastlagt af bevægelsesligningen.

Når ladningen også er påvirket af et ydre elektrisk felt E_S , ændres bevægelsesligningen til

$$m \cdot x''(t) + m \cdot \omega_0^2 \cdot x(t) = q \cdot E_S(t)$$

Indføres heri, at

$$E_S(t) = E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

bliver bevægelsesligningen

$$m \cdot x''(t) + m \cdot \omega_0^2 \cdot x(t) = q \cdot E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Løsningerne til denne ligning er

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Altså en harmonisk svingning med det påtrykte felts frekvens.

Indføres denne i bevægelsesligningen, finder vi

$$m \cdot [-\omega^2 \cdot x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)] + m \cdot \omega_0^2 \cdot x_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) = q \cdot E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Derfor bliver:

$$-m \cdot \omega^2 \cdot x_0 + m \cdot \omega_0^2 \cdot x_0 = q \cdot E_0$$

Og vi får så endelig:

$$x_0 = \frac{q \cdot E_0}{m \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Vi indsætter dette resultat i ligning (6):

$$E_{P, alle\ atomer}(t) = \frac{N \cdot \Delta z \cdot q}{2 \varepsilon_0 \cdot c} \cdot \frac{q \cdot E_0}{m \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)} \cdot \omega \cdot \sin \left[\omega \cdot \left(t - \frac{z}{c} \right) \right]$$

Dette udtryk er af præcis den form, vi gerne ville have ifølge ligning (5), som vi gentager her:

$$E_{P,alle\ atomer} \approx E_0 \cdot \sin \left[\omega \cdot \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] \cdot \omega \cdot (n - 1) \cdot \frac{\Delta z}{c}$$

Identificeres de to udtryk, følger at

$$n - 1 = \frac{N \cdot q}{2 \varepsilon_0} \cdot \frac{q}{m \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)}$$

eller

$$n = 1 + \frac{N \cdot q^2}{2 \varepsilon_0 \cdot m \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (7)$$

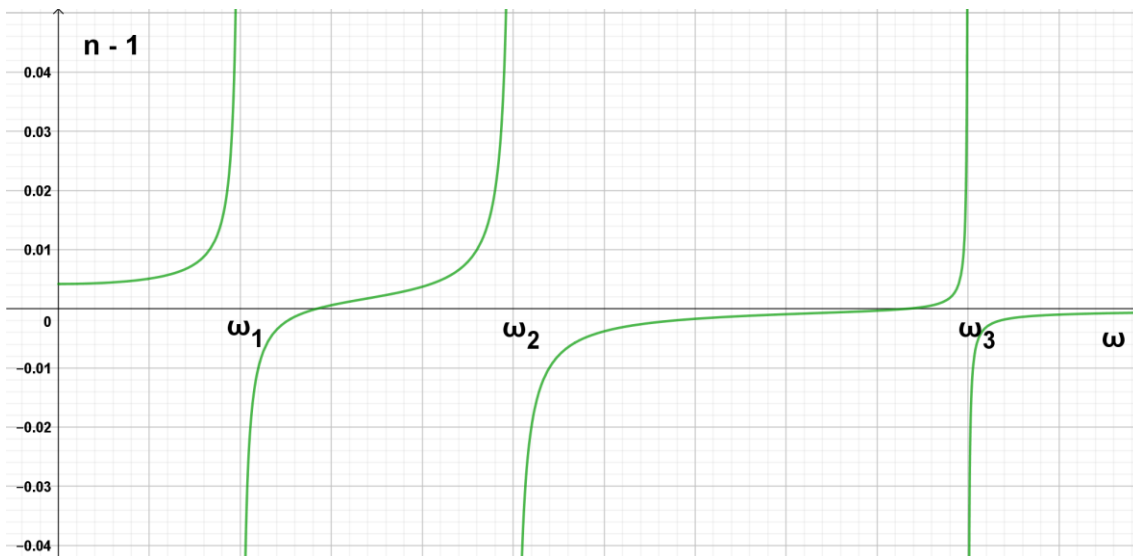
Her er det udtryk, vi gerne ville finde, nemlig brydningsindekset udtrykt ved kildefeltets (vinkel-)frekvens ω , tætheden af ladninger i stoffet samt nogle atom/elektron egenskaber.

Vi kan konkludere, at både kildefeltet og de felter, de atomare elektroner genererer, bevæger sig i stoffet med lysets fart i det tomme rum, nemlig c . Interferensen mellem dem skaber et felt, der har en lavere fasehastighed end c (her forudsat, at $n > 1$, dvs $\omega < \omega_0$ ifølge (7)).

I virkelige atomer er der mere end en resonansfrekvens, idet der jo almindeligvis er flere exciterede tilstande i et atom. Derfor skal formel (7) erstattes med følgende formel:

$$n = 1 + \frac{q^2}{2 \varepsilon_0 \cdot m} \cdot N \cdot \sum_k \frac{f_k}{(\omega_k^2 - \omega^2)} \quad (8)$$

Her er ω_k resonans(vinkel-)frekvensen for den k 'te exciterede tilstand, og f_k er den såkaldte oscillatorstyrke - som fortæller, hvor stærkt atomets k 'te exciterede tilstand deltager i svingningen.



Figur 3: brydningsindekset minus 1 som funktion af vinkelfrekvensen ω . Resonansvinkelfrekvenserne er ω_1 , ω_2 og ω_3 .

Hvis vi i formel (7) indfører bølglængden (i det tomme rum) i stedet for vinkelfrekvensen via relationen

$$\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi \cdot c}{\lambda}$$

Herved omformes (7) til

$$n - 1 = \frac{N \cdot q^2}{2\varepsilon_0 \cdot m \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{N \cdot q^2}{2\varepsilon_0 \cdot m \cdot 4\pi^2 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)}$$

Den elektriske ladning q antager vi er elektronens ladning, og massen m sætter vi til elektronens masse.

Herved kan konstanten $\frac{q^2}{2\varepsilon_0 \cdot m \cdot 4\pi^2 \cdot c^2}$ udregnes, og resultatet er

$$\frac{q^2}{2\varepsilon_0 \cdot m \cdot 4\pi^2 \cdot c^2} = 4,485 \cdot 10^{-16} \text{ m}$$

Herved forenkles udtrykket for $n - 1$ til

$$n - 1 = N \cdot \frac{4,485 \cdot 10^{-16} \text{ m}}{\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda^2}}$$

Antager vi yderligere standardbetingelserne

temperatur: 0 °C
tryk: 101325 Pa

for gassen, kan det via ædelgasligningen vises, at $N = 2,687 \cdot 10^{25} / \text{m}^3$.

Herved finder vi

$$n - 1 = \frac{1,205 \cdot 10^{10} \text{ m}^{-2}}{\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda^2}} \quad (9)$$

Eksempel: argon

Som nævnt ovenfor er der som regel flere resonansfrekvenser for et bestemt atom. Derfor vil formel (9) som regel indeholde et led for hver resonansfrekvens. Begrænser vi os til det synlige lys, vil der ofte kun være nødvendigt at medtage de resonanser, der har energier tættest på dette bølglængdeområde.

$$n - 1 = \frac{2,50141 \cdot 10^{-3}}{91,012 - \lambda^{-2}} + \frac{5,00283 \cdot 10^{-3}}{87,892 - \lambda^{-2}} + \frac{5,22343 \cdot 10^{-2}}{214,02 - \lambda^{-2}}$$

I denne formel er bølglængden målt i enheden mikrometer ($1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$). Se ref. 3.

Formlen er gældende i bølglængdeområdet 0,1404 til 0,5677 mikrometer.

Øvelse: hvilke bølglængder svarer til resonansovergangene ifølge denne formel? Beregn de tilsvarende overgangsenergi. Sammenlign fx med NIST-databasen, ref. 2

I tættere materialer kan vi ikke undgå at tage hensyn til atomernes indbyrdes vekselvirkning, da de inducerede felter fra andre atomer påvirker feltet på det enkelte atoms plads. Det vil dog føre for vidt at behandle dette emne her.

Kilder:

1) Feynman lectures, volume I, især kapitel 28 og 31 1970, Addison-Wesley Publishing Company samt internetkilder.

2) NIST--databasen:

https://physics.nist.gov/PhysRefData/ASD/lines_form.html

3) Data for brydningsforhold for gasser, se fx

<https://refractiveindex.info/?shelf=main&book=He&page=Mansfield>