Induktionsloven

Af Børge L. Nielsen, sept. 2012

- fra www.borgeleo.dk

Induktionsloven kan generelt formuleres som

(1) $$U_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \oint_{leder} \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \overrightarrow{dl}$$

hvor $\vec{v}$ er *lederens* hastighed på det pågældende sted af lederen – det sted, hvor det elektriske induktions-felt er $\vec{E}$ og det magnetiske felt er $\vec{B}$.

Hvor kommer leddet $\vec{v} \times \vec{B}$ nu fra? Det er kort fortalt det elektriske felt i lederens hvilesystem, genereret af lederens bevægelse i det magnetiske felt. Den sædvanlige udgave af induktionsloven er:

(2) $$U_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \oint_{leder} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}$$

Forskellen på de to formuleringer er, at lederen/kredsløbet i (2) forudsættes i hvile. Men det er dele af kredsløbet ikke i flere af de forsøg, vi udfører i forbindelse med induktion. Her bevæges et lederstykke jo netop i et magnetfelt. Derfor er (1) at foretrække som den generelle formulering af loven.

Hvordan kan vi nu argumentere for (1)? Det sker nedenfor – se evt. kilde 1, 2.

Vi begynder med at definere den magnetiske flux Φ_B:

(3) $$\Phi_B(t) = \int_{S(t)} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{a}$$

Her er $S(t)$ den flade, der integreres over, $d\vec{a}$ er et arealelement vinkelret på fladen.

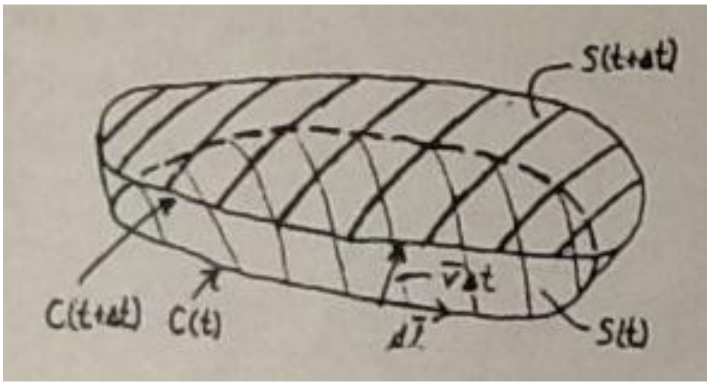
Fluxen (3) afhænger af tiden både gennem magnetfeltet $\vec{B}(\vec{r}, t)$ og gennem fladen $S(t)$. Og disse to bidrag kan netop ses i (1).

Tilvæksten i fluxen fra tiden t til tiden $t + \Delta t$ er

(4) $$\Delta\Phi_B = \Phi_B(t + \Delta t) - \Phi_B(t)$$

$$= \int_{S(t)} \overrightarrow{(B}(\vec{r}, t + \Delta t) - \vec{B}(\vec{r}, t)) \cdot d\vec{a} + \int_{S(t+\Delta t)} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{a} - \int_{S(t)} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{a}$$

En mulig tidsudvikling af fladen ses på figuren nedenfor.



Figur 1: Fladens tidsudvikling

Betragtes den lukkede flade bestående af $S(t+\Delta t)$ og $S(t)$ samt randstykket der forbinder de to flader, finder vi:

(5) $$0 = \int_{hele\ fladen} \vec{B}(\vec{r}, t+\Delta t) \cdot d\vec{a}$$

$$= \int_{S(t+\Delta t)} \vec{B}(\vec{r}, t+\Delta t) \cdot d\vec{a} - \int_{S(t)} \vec{B}(\vec{r}, t+\Delta t) \cdot d\vec{a} + \oint_{C(t)} (d\vec{l} \times \vec{v}\Delta t) \cdot \vec{B}(\vec{r}, t+\Delta t)$$

fordi fluxen af magnetfeltet gennem en lukket flade er 0 og fordi $d\vec{a} = d\vec{l} \times \vec{v}\Delta t$ er det udadrettede fladeelement for sidestykket, når Δt er lille. Det sidste integral går langs fladens randkurve $C(t)$.

Benyttes (5) i (4), fås

(6) $$\frac{d\Phi_B}{dt} = \int_{S(t)} d\vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(\vec{r}, t) - \oint_{C(t)} (d\vec{l} \times \vec{v}\Delta t) \cdot \vec{B}(\vec{r}, t)$$

Og af Maxwell-ligningen

(7) $$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

finder vi endelig

(8) $$\frac{d\Phi_B}{dt} = -\oint_{C(t)} d\vec{l} \cdot (\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{v}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t))$$

Hvis hastighedsfeltet $\vec{v}(\vec{r}, t)$ repræsenterer lederens bevægelse, som for eksempel når $C(t)$ følger en strømkreds, vil integranden på højre side netop være Lorentzkraften på en enhedsladning, og integralet

(9) $$U_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \oint_{C(t)} d\vec{l} \cdot (\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{v}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t))$$

bliver da netop det samlede arbejde, denne kraft udfører, når enhedsladninger tænkes flyttet de små stykker $d\vec{l}$ hele vejen rundt i kredsløbet – altså den elektromotoriske kraft.

Argumentet for, at leddet $\vec{v}(\vec{r},t) \times \vec{B}(\vec{r},t)$ giver ekstra arbejde på ladningerne i kredsløbet kan også ses ved, at leddet $\vec{v}(\vec{r},t) \times \vec{B}(\vec{r},t)$ giver (et bidrag til) det elektriske felt i lederens hvilesystem, og derfor er $d\vec{l} \cdot \vec{v}(\vec{r},t) \times \vec{B}(\vec{r},t)$ den elektriske energi, der pumpes ind kredsløbet som følge af kredsløbets bevægelse når en enhedsladning bevæges stykket $d\vec{l}$.

1. ParadokSALT og PEBER, Benny Lautrup og Børge Leo Nielsen, Gamma 35, april 1978, 19
2. J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, 2. Ed. (Wiley, N.Y. 1975)