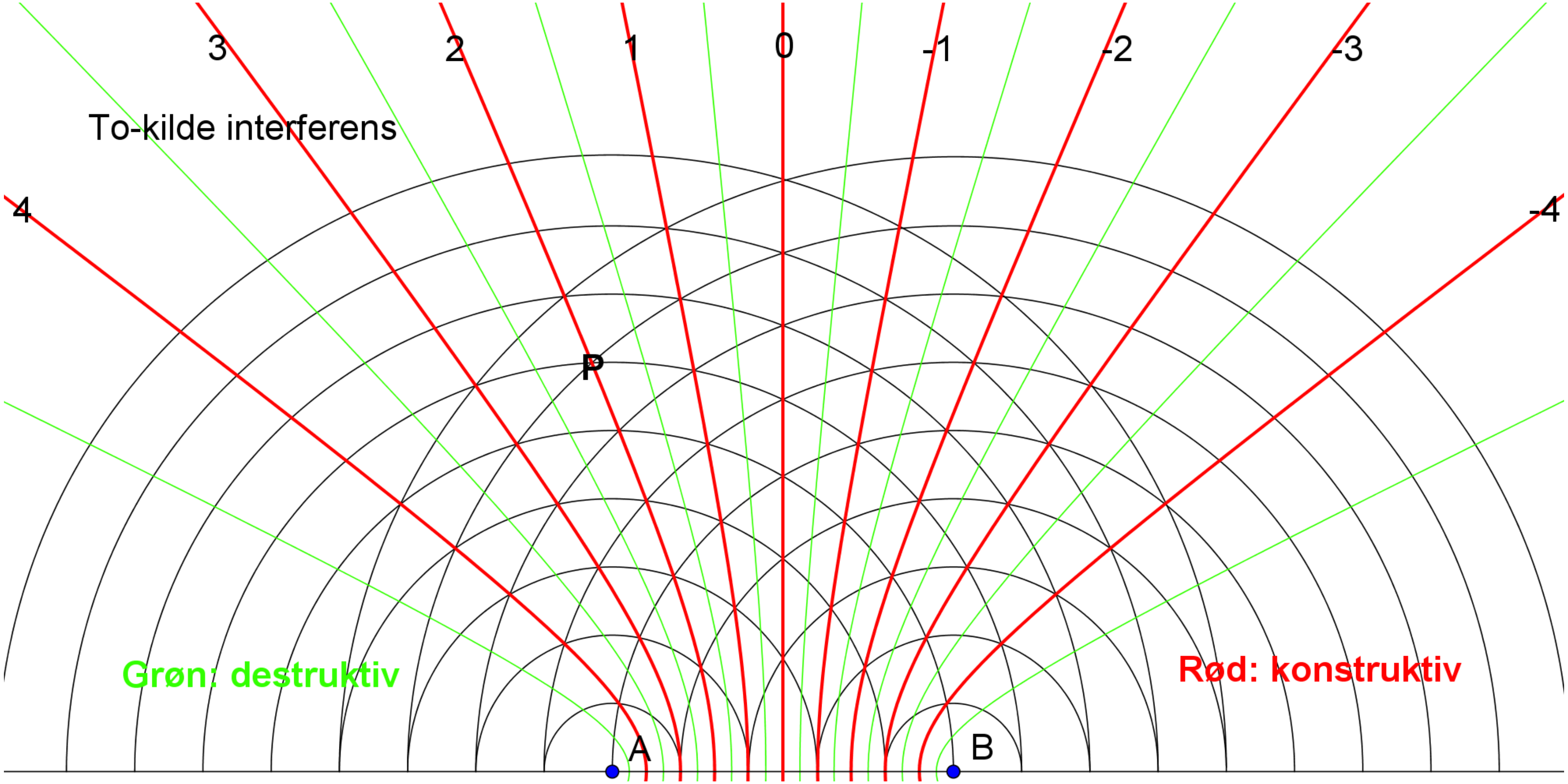
Interferens mellem cirkelbølger fra to kilder i fase

Betingelse for konstruktiv interferens: $|PB| - |PA| = m \cdot \lambda$ hvor m er et helt tal og λ er bølgelængden



På figuren er indtegnet retninger (de røde linjer) med konstruktiv interferens. Linjerne er hyperbel-kurver der opfylder betingelsen for konstruktiv interferens $|PB| - |PA| = m \cdot \lambda$. Værdierne for det hele tal m er skrevet på de røde linjer. Grøn: destruktiv interferens.

Konstruktiv interferens

Hvordan omformer vi betingelsen for konstruktiv interferens

(1) $|PB| - |PA| = m \cdot \lambda$

til ligninger af typen $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ for de hyperbler, i hvis retning bølgerne med konstruktiv interferens udbreder sig?

Svaret er, idet centrum for hyperblerne er $(0,0)$ midt mellem de to kilder og punktet *P* har koordinaterne (x, y):

(2) $\left(\frac{x}{m \cdot \frac{1}{2}\lambda}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{n^2 - m^2} \cdot \frac{1}{2}\lambda}\right)^2 = 1$ hvor $n = \frac{|AB|}{\lambda}$, og $m = 1, 2, \ldots, n-1$ Hyperbelligninger

Tallet *n* er altså afstanden mellem de to kilder, målt i bølgelængdeenheder.

Tilfældet $m = 0$ er en udartet hyperbel: nemlig en ret linje midt mellem de to kilder. Den beskrives ikke af ligning (2).

Der er i alt $2n - 1$ hyperbler for konstruktiv interferens.

Hyperblerne har asymptoterne

(3) $y = \pm \frac{b}{a} \cdot x = \pm \frac{\sqrt{n^2 - m^2}}{m} \cdot x$ med $m = 1, 2, \ldots, n-1$

Men hvordan kommer vi til udtrykket (2)?

Det kræver lidt matematisk argumentation. Så hvis du hellere selv vil klare udfordringen, så stop læsningen her!

Begrundelse for (2):

Vi tager udgangspunkt i betingelsen for konstruktiv interferens (1):

(4) $|PB| - |PA| = m \cdot \lambda$ *m* er et helt tal

De to kilder placeres i punkterne $A(-c, 0)$ og $B(c, 0)$. Afstanden mellem de to kilder er derfor

$$|AB| = 2 \cdot c$$

Punktet P har koordinaterne $P(x, y)$. Indføres koordinaterne i betingelsen (4), finder vi:

(5) $$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=m\cdot\lambda$$

Vi kvadrerer på begge sider:

$$((x-c)^2+y^2)+((x+c)^2+y^2)-2\sqrt{(x-c)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2}=m^2\cdot\lambda^2$$

Herefter isoleres kvadratrødderne på højre side:

$$((x-c)^2+y^2)+((x+c)^2+y^2)-m^2\cdot\lambda^2=2\sqrt{(x-c)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Vi kvadrerer så igen:

$$((x-c)^2+y^2)^2+((x+c)^2+y^2)^2+m^4\cdot\lambda^4+2((x-c)^2+y^2)\cdot((x+c)^2+y^2)-2m^2\cdot\lambda^2\cdot((x-c)^2+y^2)+((x+c)^2+y^2)$$
$$=4\cdot((x-c)^2+y^2)\cdot((x+c)^2+y^2)$$

Vi subtraherer højresiden på begge sider mv:

$$((x-c)^2+y^2)^2+((x+c)^2+y^2)^2-2((x-c)^2+y^2)\cdot((x+c)^2+y^2)=-m^4\cdot\lambda^4+2m^2\cdot\lambda^2\cdot((x-c)^2+y^2)+((x+c)^2+y^2)$$

Venstresiden genkendes som kvadratet på en toleddet størrelse:

$$(((x-c)^2+y^2)-((x+c)^2+y^2))^2=-m^4\cdot\lambda^4+2m^2\cdot\lambda^2\cdot((x-c)^2+y^2)+((x+c)^2+y^2)$$

Venstresiden og højresiden reduceres:

$$16x^2c^2=-m^4\cdot\lambda^4+2m^2\cdot\lambda^2\cdot(2x^2+2c^2+2y^2)$$

Eller

$$16x^2c^2=-m^4\cdot\lambda^4+4m^2\cdot\lambda^2\cdot(x^2+c^2+y^2)$$

Som omformes til

$$16x^2c^2-4m^2\cdot\lambda^2\cdot x^2-4m^2\cdot\lambda^2\cdot y^2=4m^2\cdot\lambda^2\cdot c^2-m^4\cdot\lambda^4$$

Eller

$$(16c^2 - 4m^2 \cdot \lambda^2) \cdot x^2 - 4m^2 \cdot \lambda^2 \cdot y^2 = 4m^2 \cdot \lambda^2 \cdot c^2 - m^4 \cdot \lambda^4$$

Højresiden omformes:

$$(16c^2 - 4m^2 \cdot \lambda^2) \cdot x^2 - 4m^2 \cdot \lambda^2 \cdot y^2 = \frac{1}{4} m^2 \cdot \lambda^2 (16c^2 - 4m^2 \cdot \lambda^2)$$

Heri indfører vi definitionen

$$n = \frac{|AB|}{\lambda} = \frac{2 \cdot c}{\lambda} \qquad \text{hvoraf} \qquad 16c^2 = 4n^2 \cdot \lambda^2$$

og får

$$(4n^2 \cdot \lambda^2 - 4m^2 \cdot \lambda^2) \cdot x^2 - 4m^2 \cdot \lambda^2 \cdot y^2 = \frac{1}{4} m^2 \cdot \lambda^2 (4n^2 \cdot \lambda^2 - 4m^2 \cdot \lambda^2)$$

Vi deler med $4\lambda^2$ på begge sider:

$$(n^2 - m^2) \cdot x^2 - m^2 \cdot y^2 = \frac{1}{4} m^2 \cdot \lambda^2 \cdot (n^2 - m^2)$$

Og så deler vi med $(n^2 - m^2)$ på begge sider:

$$x^2 - \frac{m^2}{(n^2 - m^2)} \cdot y^2 = \frac{1}{4} m^2 \cdot \lambda^2$$

Vi deler nu med $\frac{1}{4} m^2 \cdot \lambda^2 = \left(\frac{1}{2} m \cdot \lambda\right)^2$ på begge sider:

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4} m^2 \cdot \lambda^2} - \frac{y^2}{(n^2 - m^2) \frac{1}{4} \cdot \lambda^2} = 1$$

Eller alternativt

$$\left(\frac{x}{m \cdot \frac{1}{2} \lambda}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{n^2 - m^2} \cdot \frac{1}{2} \lambda}\right)^2 = 1$$

som påstået i formel (2).

Hvis vi måler koordinaterne *x* og *y* i enheder af bølgelængden, så bliver ligningen for hyperblerne

$$\frac{X^2}{\frac{1}{4}m^2} - \frac{Y^2}{(n^2-m^2)\frac{1}{4}} = 1$$

hvor $X = x/\lambda$ og $Y = y/\lambda$.

Parameterfremstillinger

Hvis vi hellere vil bruge en parameterfremstilling for hyperblerne, kan vi bruge

$$x(p) = \pm m \cdot \frac{1}{2}\lambda \cdot \cosh(p) \qquad \text{og} \qquad y(p) = \sqrt{n^2 - m^2} \cdot \frac{1}{2}\lambda \cdot \sinh(p)$$

hvor igen $n = \frac{|AB|}{\lambda}$ og $m = 0,1,2,\dots,n-1$

Parameteren p er et reelt tal, men i praksis er det selvfølgelig tilstrækkeligt at begrænse p til et interval $[0; p_{max}]$, hvor

$y_{max} = \frac{1}{2}\lambda \cdot \sinh(p_{max})$ hvor y_{max} er den største *y*-værdi på figuren.

Destruktiv interferens

Hvis vi vil tegne hyperbler med destruktiv interferens, er betingelsen

(6) $$|PB| - |PA| = (m + \tfrac{1}{2}) \cdot \lambda$$ hvor *m* et helt tal, og $-n \leq m \leq n - 1$s

Denne ligning beskriver naturligvis også hyperbler, som kan beskrives ved ligningerne

(7) $$\left(\frac{x}{(m+\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{2}\lambda}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{n^2-(m+\frac{1}{2})^2}\cdot\frac{1}{2}\lambda}\right)^2 = 1$$ hvor det hele tal *m* opfylder $-n \leq m \leq n-1$, i alt $2n$ hyperbler

Bølgefart i retningerne med konstruktiv interferens

Hvilken fart bevæger bølgetoppene sig med i retningerne med konstruktiv interferens?

Vi tager udgangspunkt i ligningerne

$|PB| = m \cdot \lambda + v \cdot t$ og $|PA| = v \cdot t$, således at $|PB| - |PA| = m \cdot \lambda$. Her er *v* lydens fart, og t er tiden. De to ligninger beskriver ringbølger, hvor radius øges med lydens fart *v*.

Med koordinater som ovenfor får vi

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = m \cdot \lambda + v \cdot t \quad \text{og} \quad \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = v \cdot t$$

Vi differentierer de to ligninger mht. tiden t:

$$\frac{1}{2\sqrt{(x-c)^2 + y^2}} \cdot \left(2(x-c) \cdot \frac{dx}{dt} + 2y \cdot \frac{dy}{dt}\right) = v$$

og

$$\frac{1}{2\sqrt{(x+c)^2 + y^2}} \cdot \left(2(x+c) \cdot \frac{dx}{dt} + 2y \cdot \frac{dy}{dt}\right) = v$$

Vi omformer de to ligninger til:

$$(x-c) \cdot \frac{dx}{dt} + y \cdot \frac{dy}{dt} = |PB| \cdot v$$

og

$$(x+c) \cdot \frac{dx}{dt} + y \cdot \frac{dy}{dt} = |PA| \cdot v$$

Og vi subtraherer de to ligninger:

$$-2c \cdot \frac{dx}{dt} = (|PB| - |PA|) \cdot v$$

Så indfører vi betingelsen $|PB| - |PA| = m \cdot \lambda$ i denne ligning:

$$-2c \cdot \frac{dx}{dt} = m \cdot \lambda \cdot v$$

Herved bliver

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{m \cdot \lambda}{2c} \cdot v$$

Indfører vi definitionen $|AB| = 2c = n \cdot \lambda$, har vi så

(8) $$\frac{dx}{dt} = -\frac{m}{n} \cdot v$$

Så - overraskende nok - er x-hastigheden konstant!

Men hvordan finder vi så $\frac{dy}{dt}$?

Vi tager udgangspunkt i hyperbelligningen

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}m^2 \cdot \lambda^2} - \frac{y^2}{(n^2 - m^2)\frac{1}{4} \cdot \lambda^2} = 1$$

Eller - med $a^2 = \frac{1}{4}m^2 \cdot \lambda^2$ og $b^2 = (n^2 - m^2)\frac{1}{4} \cdot \lambda^2$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Vi differentierer denne ligning mht. tiden t:

$$2\frac{x \cdot \frac{dx}{dt}}{a^2} - 2\frac{y \cdot \frac{dy}{dt}}{b^2} = 0$$

hvoraf:

$$\frac{x \cdot \frac{dx}{dt}}{a^2} = \frac{y \cdot \frac{dy}{dt}}{b^2}$$

og dermed

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\frac{x}{a}}{\frac{y}{b}} \cdot \frac{b}{a}$$

Allerede her ser vi - da $\frac{dx}{dt}$ er konstant - at $\frac{dy}{dt}$ divergerer, når *y* nærmer sig 0 (linjen mellem de to bølgegivere).

Vi er nu i stand til at finde bølgefarten v_{kon} langs kurverne med konstruktiv interferens:

$$v_{kon}^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

$$v_{kon}^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \cdot (1 + \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^2}{\left(\frac{y}{b}\right)^2} \cdot \frac{b^2}{a^2})$$

Vi bruger så hyperbelligningen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ og får

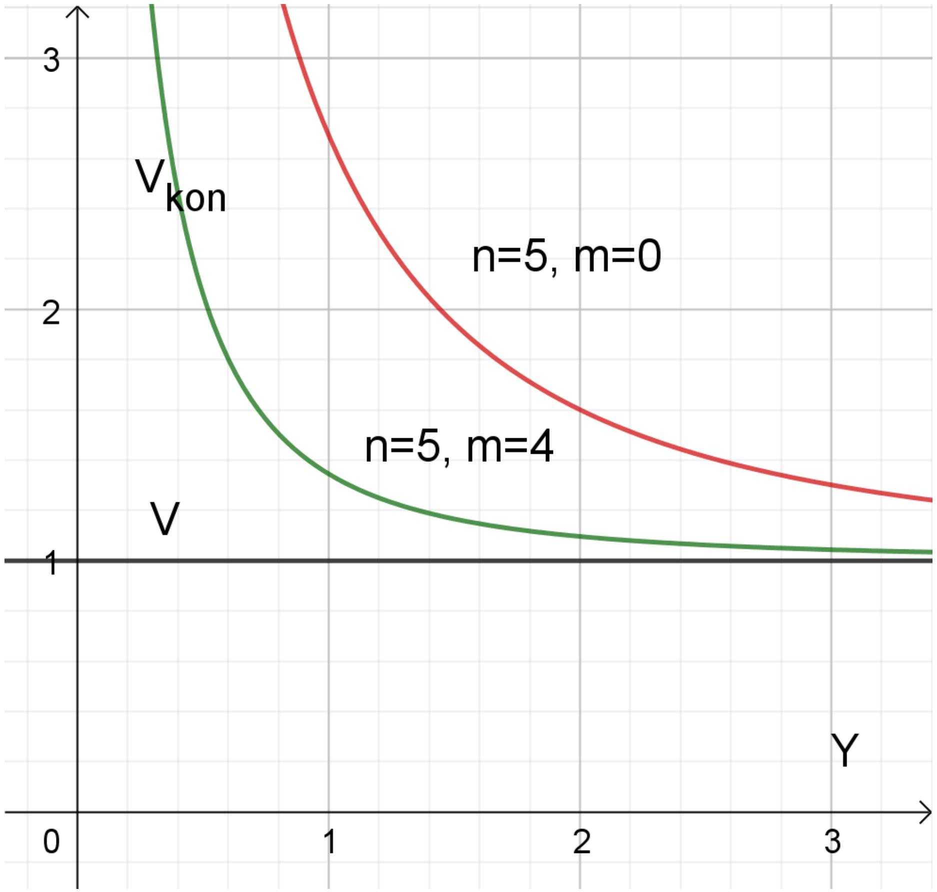
$$v_{kon}^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \cdot (1 + \frac{1+\frac{y^2}{b^2}}{\frac{y^2}{b^2}} \cdot \frac{b^2}{a^2})$$

Indfører vi heri, at $\frac{dx}{dt} = -\frac{m}{n} \cdot v$, og $a^2 = \frac{1}{4}m^2 \cdot \lambda^2$ og $b^2 = (n^2 - m^2)\frac{1}{4} \cdot \lambda^2$:

$$v_{kon}^2 = v^2 \left(\frac{m}{n}\right)^2 \cdot (1 + \frac{1+\frac{y^2}{(n^2-m^2)\frac{1}{4}\cdot\lambda^2}}{\frac{y^2}{(n^2-m^2)\frac{1}{4}\cdot\lambda^2}} \cdot \frac{n^2-m^2}{m^2})$$

Eller reduceret:

(9) $$v_{kon}^2 = v^2 \cdot (\frac{m^2}{n^2} + \frac{1+\frac{y^2}{(n^2-m^2)\frac{1}{4}\cdot\lambda^2}}{\frac{y^2}{(n^2-m^2)\frac{1}{4}\cdot\lambda^2}} \cdot \left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right))$$



Figur 1: bølgefart v-kon som funktion af afstanden Y

For små værdier af y/λ vil v_{kon} divergere, og for store værdier af y/λ vil brøken $\frac{1+\frac{y^2}{(n^2-m^2)\frac{1}{4}\cdot\lambda^2}}{\frac{y^2}{(n^2-m^2)\frac{1}{4}\cdot\lambda^2}}$ nærme sig 1, og derved vil

$$v_{kon}^2 \rightarrow v^2 \cdot \left(\frac{m^2}{n^2} + 1 \cdot \left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right)\right) = v^2$$

Altså vil bølgefarten v_{kon} nærme sig lydens fart v på stor afstand af bølgegiverne.

Som et eksempel ser vi på tilfældet $n = 5$ og $m = 4$, $Y = \frac{y}{\lambda}$. Se figuren side 1. Formel (9) ovenfor giver så:

$$v_{kon}^2 = v^2 \cdot (\frac{4^2}{5^2} + \frac{1 + \frac{Y^2}{(5^2 - 4^2)\frac{1}{4}}}{\frac{Y^2}{(5^2 - 4^2)\frac{1}{4}}} \cdot \left(1 - \frac{4^2}{5^2}\right))$$

På grafen til venstre ses v_{kon} som funktion af Y. På grafen er $v = 1$.

Det fremgår, at bølgetoppenes fart i hyperbelretningen med konstruktiv interferens tæt på bølgegiverne kan være langt større end lydhastigheden. Det fremgår, at det er 0. ordens bølgen der har den største fart. Forestiller man sig, at du 'surfer' på bølgen og skal hurtigt ud, er det altså centerbølgen, du skal surfe på.