Kræfter, arbejde og energi

- fra www.borgeleo.dk

Indhold

Kræfter

1. Kræfter - bevægelsers årsag

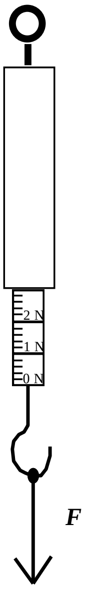


Fig.1
Kræfters størrelse kan måles med et Newton-meter

I fysikken taler vi om kræfter som *årsag (grund) til bevægelser*. Dette kendes også fra hverdagen, vi taler f.eks. om at "lægge alle kræfter i" for at kaste en bold, *skubbe* en bil igang, *trække* en slæde eller køre hurtigt på cykel.

Kræfter er karakteriseret ved at have en *retning* og *størrelse*. Retningen af en kraft angives ved at tegne en pil i den retning, som kraften virker. Størrelsen af kraften angives ved pilens længde. Du bestemmer selv, hvilken længde, der skal svare til en bestemt kraft. Men har du først tegnet *en* kraft-pil, skal størrelsen af de øvrige kraftpile (hvis der er flere) indrettes efter længden af den først tegnede. Vi bruger som regel bogstavet *F* (force) for kraft.

Hvis vi vil angive, at kraften både har retning og en vis størrelse, skrives kraften som $\boldsymbol{F}$ (med fed skrift) eller $\vec{F}$ (med pil over). Kraftens størrelse skrives som $|\boldsymbol{F}|$ eller $|\vec{F}|$. Denne kan måles med et *Newton-meter*, der i det væsentlige er en fjeder, der strækkes mere og mere, jo større kraft, der trækker i den. Se fig.1. Ligeledes kan en *vægt* benyttes som kraftmåler, idet vægten viser et tal, der er proportionalt med den kraft, der påvirker vægten.

Fysiske størrelser, der både har retning og størrelse (og som derfor kan tegnes som pile) kaldes *vektorer*. Kraften er altså en vektor. Andre eksempler på vektorer er acceleration $\boldsymbol{a}$, hastighed $\boldsymbol{v}$.

Eksempler på kræfter er *tyngde*kræfter, *elektriske* tiltræknings- eller frastødningskræfter, *magnetiske* kræfter, *fjeder*kræfter, *gnidnings*kræfter.

SI-enheden for kræfter er 1 N (Newton), der - som vi senere skal se - er den kraft, der giver et legeme med massen 1 kg en accelerarion på 1 $\mathrm{m/s^2}$.

Du kan også få en idé om størrelsen af 1 N ved at tænke på, at du må yde en kraft på ca. 10 N for at løfte et kg mel - eller 1 kg af et hvilketsomhelst andet stof.

2. Virkning af flere kræfter - kræfternes parallelogram

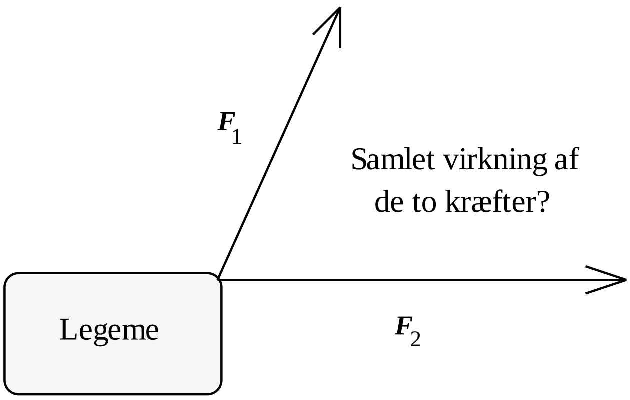


Fig.2

Hvis et legeme påvirkes af flere kræfter, eventuelt med forskellige retninger, kan vi *ikke* finde den samlede virkning af disse kræfter ved blot at lægge kræfterne sammen som tal - altså ved at lægge kræfternes størrelser sammen. På figuren (fig.2) er vist et eksempel, hvor de to kræfter $\boldsymbol{F}_1$ og $\boldsymbol{F}_2$ har forskellige retninger.

Det viser sig, at de to kræfter $\boldsymbol{F}_1$ og $\boldsymbol{F}_2$ kan erstattes af en enkelt kraft $\boldsymbol{F}$, der har samme virkning som $\boldsymbol{F}_1$ og $\boldsymbol{F}_2$ tilsammen.

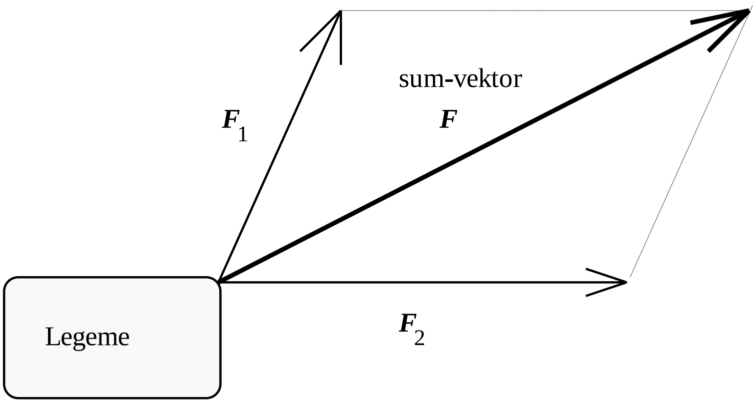


Fig.3

Denne kraft $\boldsymbol{F}$ kaldes *summen* af $\boldsymbol{F}_1$ og $\boldsymbol{F}_2$ og findes ved at tegne et *parallelogram* som på fig.3.
Figur 3 viser retning og størrelse af den ene kraft $\boldsymbol{F}$, der kan *erstatte* de to kræfter $\boldsymbol{F}_1$ og $\boldsymbol{F}_2$. $\boldsymbol{F}$ kaldes **sumvektoren**, og den skrives således: $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$. Her er altså ikke tale om en almindelig sum af tal, men en sum af "pile" - som vist på figur 3.
Størrelsen af sumvektoren $\boldsymbol{F}$ er i dette tilfælde mindre end summen af de to *størrelser* af kræfterne $\boldsymbol{F}_1$ og $\boldsymbol{F}_2$ - som det ses på fig. 3. Faktisk fremgår det jo af fig. 3, at $\boldsymbol{F}_1$ og $\boldsymbol{F}_2$ kan opfattes som to sider i en af parallogrammets trekanter, mens $\boldsymbol{F}$ er den tredie side i samme trekant. Dette er tydeligere vist på figur 3a nedenfor. Her er de to kræfter afsat i *forlængelse* af hinanden. Havde vi i stedet benyttet den anden trekant i parallogrammet på fig. 3, var resultatet $\boldsymbol{F}$ blevet det samme. Det er altså ikke afgørende, i hvilken *rækkefølge* kræfter lægges sammen som pile.
Hvis vi *på forhånd* havde kendskab til kraften $\boldsymbol{F}$ på fig. 3, kunne denne kraft erstattes af de to kræfter $\boldsymbol{F}_1$ og $\boldsymbol{F}_2$ - altså den modsatte situation af den, vi så på ovenfor. Dette kaldes en *opløsning* af kraften i to andre kræfter - efter bestemte retninger.

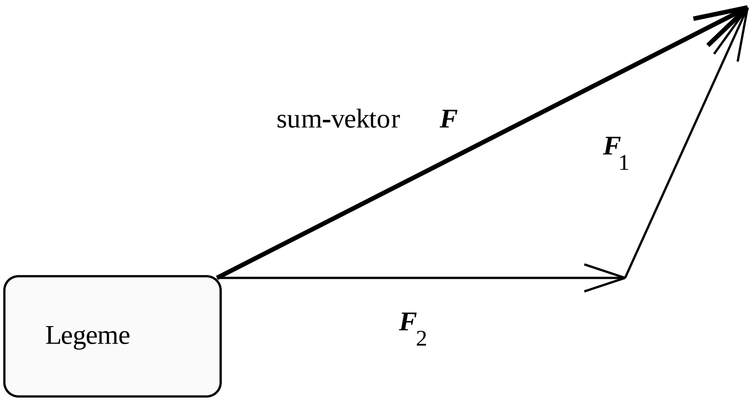


Fig.3a

På figur 4a,4b og 4c nedenfor vises flere eksempler på, hvordan summen af to kræfter kan findes.

For ikke at tegne $\boldsymbol{F}$ oven i de andre kræfter er den tegnet under de to andre kræfter. Det ses af fig. 4b, at den samlede virkning af de to

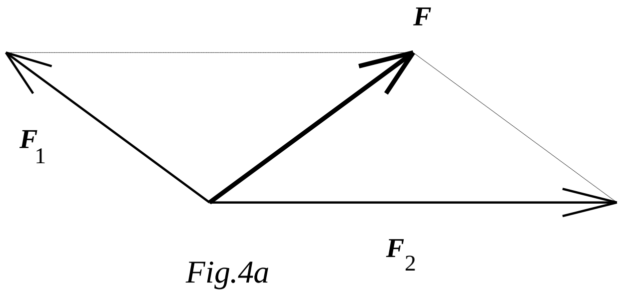


Fig.4a

Fig. 4b

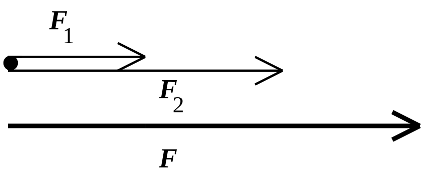
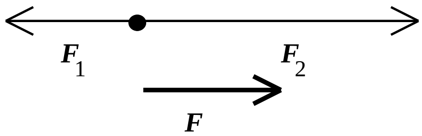


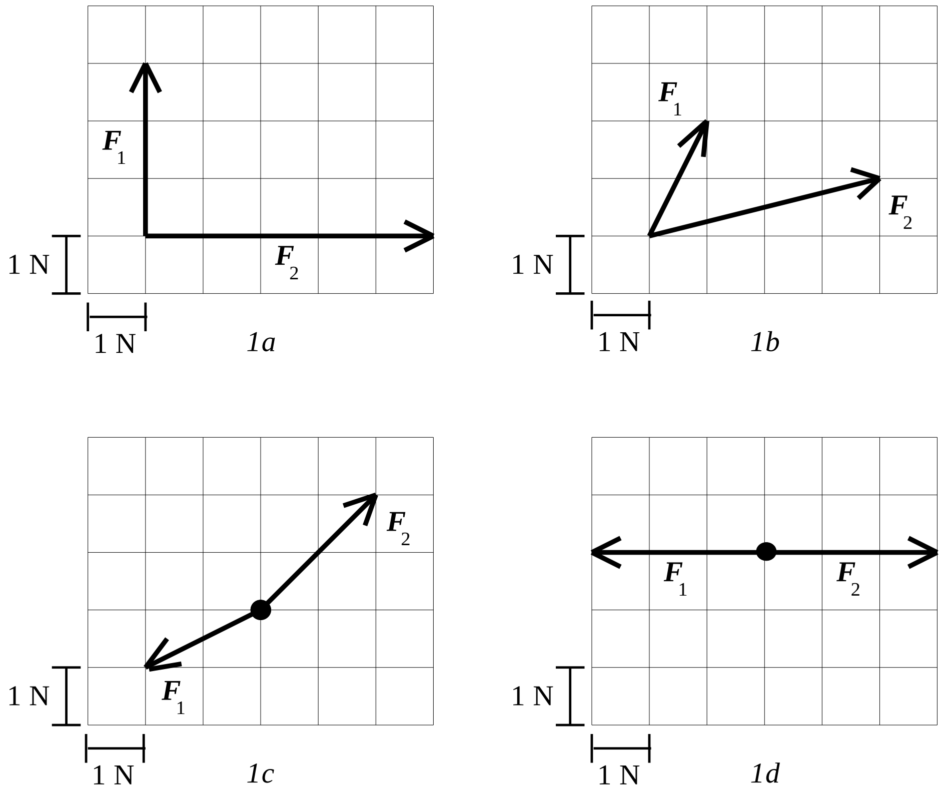
Fig. 4c



kræfter er størst, når begge trækker i samme retning - ikke særlig overraskende. *Kun i dette tilfælde* er *størrelsen* af $\boldsymbol{F}$ den samme som summen af *størrelserne* af $\boldsymbol{F}_1$ og $\boldsymbol{F}_2$. Er f.eks. $|\boldsymbol{F}_1|$ = 2 N og $|\boldsymbol{F}_2|$ = 5 N, bliver $|\boldsymbol{F}|$ = 7 N.

I tilfældet fig. 4c trækker de to kræfter i modsatte retninger, og den samlede virkning af dette er, at *størrelsen* af $\boldsymbol{F}$ bliver forskellen på de to kræfters *størrelse*. Hvis altså f.eks. $|\boldsymbol{F}_1|$ = 2 N og $|\boldsymbol{F}_2|$ = 5 N, bliver $|\boldsymbol{F}|$ = 3 N.

Øvelse 1 Find retning og størrelse af summen af de kræfter, der er vist på figurerne nedenfor (tegn summen som en pil og find dens længde udtrykt i Newton (N)):



Skal man finde summen af flere end 2 kræfter, kan man blot starte med at lægge to af dem sammen som ovenfor, og så til denne sum lægge den næste kraft osv. Rækkefølgen spiller ikke nogen rolle - summen af alle kræfterne giver den samme vektor.

3.Newtons bevægelseslov (Newtons 2. lov)

Sir Isaac Newton (1642 - 1727) udgav i 1687 det vel nok vigtigste værk, der nogensinde er skrevet i naturvidenskabens historie, nemlig *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Naturvidenskabens matematiske principper) - eller kortere: *Principia*. I dette værk opstillede Newton sin teori for bevægelse. (Ved hjælp af denne teori - og Newtons gravitationslov for kræfter mellem planeterne - var Newton som den første i stand til at forudsige planeters bevægelse, tidevand m.m. på basis af fysiske principper)

Inden vi behandler Newtons bevægelseslove, må du dog prøve at gøre dig nogenlunde klart, hvordan din egen opfattelse af bevægelse og kræfter er. Dette kan du bl.a. gøre ved at prøve at svare på følgende øvelser:

Øvelse 2 Kan et legeme bevæge sig uden at være påvirket af kræfter?
Diskuter de kræfter, der påvirker en vogn, der ruller hen over katederet.
(Din lærer har sat bevægelsen igang og berører ikke længere vognen)

Øvelse 3 Forestil dig, at du en dag er ved stranden, og at du kaster en sten ud over vandet.
a) På hvilket tidspunkt holder din kraftpåvirkning af stenen op?
b) Er stenen påvirket af en kraft *i bevægelsens retning* efter at du har sluppet den?
c) Hvilken retning har luftmodstanden i forhold til bevægelsen?
d) Hvorfor "krummer" stenens bane nedad?

Øvelse 4 Som bekendt tiltrækker positive og negative elektriske ladninger hinanden.
På figuren nedenfor er vist en partikel med ladningen –1 og en anden partikel med ladningen +2 (enheder for ladning kommer vi tilbage til senere).

Negative og positive ladninger tiltrækker hinanden.

Prøv at tegne de kræfter, som de to ladninger påvirker hinanden med, således at kraftpilenes længde passer med kræfternes indbyrdes størrelse.

Øvelse 5 Kan det være rigtigt, at man kun kan bevæge sig *i forhold til* andre ting? Altså at det er meningsløst bare at sige, at man bevæger sig?

Vi vil herefter i første omgang beskæftige os med Newtons 2. lov. Denne vigtige bevægelseslov fortæller os om sammenhængen mellem et legemes *bevægelse* og de *kræfter*, der påvirker legemet.

Newtons 2. lov fortæller os, at hvis vi er i stand til at finde *summen af alle de kræfter, der påvirker et legeme*, kan vi også finde dette legemes *acceleration* - hvis vi kender legemets masse.
Formuleret med fysiske symboler lyder Newtons 2. lov:

(3.1)	$\boldsymbol{F}_{\text{res}} = m \cdot \boldsymbol{a}$	**Newtons 2. lov**

Her er $\boldsymbol{F}_{\text{res}}$ den såkaldte *resulterende kraft* på legemet - også kaldet *netto*kraften. Denne findes ved at lægge alle virkende enkeltkræfter sammen efter de principper, som vi så på i

forrige afsnit. Disse enkeltkræfter kan være tyngdekræfter, elektriske kræfter, magnetiske kræfter m.m.
Den fysiske størrelse *m* er legemets masse. Massen er et udtryk for stofindholdet i legemet. Den kan f.eks. bestemmes v.h.a. en vægt.

Den fysiske størrelse ***a*** i Newtons 2. lov er legemets *acceleration*, dvs. legemets *hastigheds-tilvækst pr. tidsenhed*.
Vi definerer her accelerationen på følgende måde:

(3.2)	$\boldsymbol{a} = \dfrac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$	Acceleration er hastigheds*tilvækst* pr. tidsenhed

I denne ligning betyder det græske symbol Δ (delta) *tilvækst*. Når det står foran symbolet for hastighed ***v***, betyder de to symboler altså tilsammen *tilvæksten i hastighed*. Tilsvarende betyder Δt tilvækst i tid, altså den tid, som tilvæksten i hastigheden har varet.
Da hastighed har SI-enheden m/s, får accelerationen ifølge (3.2) SI-enheden (m/s):s = $\mathrm{m/s^2}$.
Vi *definerer* 1N som den kraft, der er nødvendig for at give et legeme med massen 1 kg en acceleration på 1 $\mathrm{m/s^2}$. Ifølge Newtons 2. lov (3.1) får vi derfor følgende sammenhæng mellem kraftenheden 1 N og grundenhederne m, s og kg:

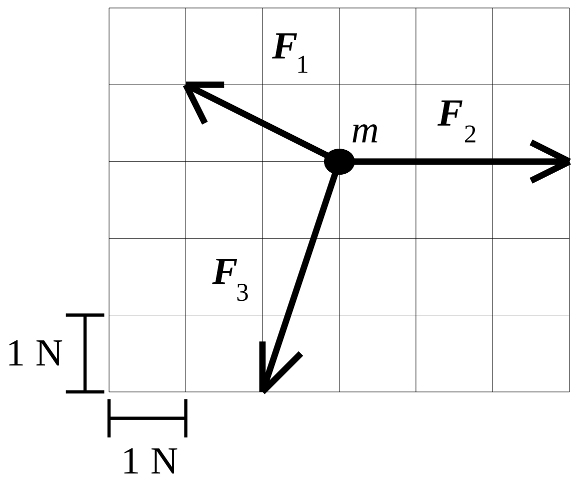
(3.3)	$1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg} \cdot 1\,\mathrm{m/s^2}$	SI - enheder i Newtons 2. lov

Ligning (3.1) fortæller os, at den resulterende krafts *størrelse* er lig med legemets masse ganget med accelerationens *størrelse*. Men som tidligere nævnt har *accelerationen* naturligvis både en størrelse og en retning - ligesom den *resulterende kraft* har det. Ligning (3.1) fortæller os også, at *retningerne* for disse to størrelser er ens! ("Pilen" $\boldsymbol{F}_{\mathrm{res}}$ på venstre side af (3.1) er lig "pilen" $\boldsymbol{a}$ på højre side, ganget med massen *m* - heri ligger, at de to pile ikke nødvendigvis er lige lange, men dog har *samme retning*. Generelt gælder, at vektorer, der ganges med et *positivt* tal, giver en ny vektor med *samme retning* som den oprindelige). Hvis accelerationen skal tegnes ind som en pil på en figur, skal den altså have samme retning som den resulterende kraft (= netto-kraften, sum-kraften - kært barn har mange navne).
Det skal understreges, at den resulterende kraft ikke i sig selv er en kraft! Den er blot *(vektor-) summen* af alle de enkeltkræfter, der påvirker legemet. Den resulterende kraft er en regnestørrelse, der f.eks. tillader os at regne legemets acceleration ud. (Omtrent på samme måde er summen af klassens karakterer i fysik *ikke* er en karakter - men en regnestørrelse, der kan bruges til f.eks. at regne klassens gennemsnit ud.)

Eksempel Antag, at vi har et legeme med massen 5,0 kg, der er udsat for en resulterende kraft af størrelsen 20 N. Dette legeme vil accelerere, og accelerationens *størrelse* vil ifølge (3.1) blive

$$|\boldsymbol{a}| = \frac{|\boldsymbol{F}_{\mathrm{res}}|}{m} = \frac{20\,\mathrm{N}}{5{,}0\,\mathrm{kg}} = 4{,}0\,\mathrm{m/s^2}$$

Accelerationens *retning* vil være den samme som retningen af den resulterende kraft.



Øvelse 6 Beregn den resulterende kraft, der er nødvendig for at give en bil med massen 800 kg en acceleration på 2,0 $\mathrm{m/s^2}$. Bilen antages at starte fra hvile. Hvad er bilens fart efter 10 sek? Efter 20 sek? 30 sek?

Øvelse 7 Et legeme er udsat for de 3 kræfter, der er indtegnet på figuren nedenfor. Legemets masse er 10 kg.

a) Find den resulterende kraft, som legemet er påvirket af. Indtegn den på figuren.
b) Beregn størrelsen af legemets acceleration.
c) Indtegn denne acceleration på figuren, eventuelt med en anden farve end den resulterende kraft. *Længden* af accelerationspilen bestemmer du selv - der er jo ikke andre accelerationspile at sammenligne med.

4. Newtons 3 love

Newtons 3 love lyder:

1. lov: Et legeme,der ikke er påvirket af kræfter (eller hvor den resulterende kraft på legemet er **0**), vil enten forblive i hvile eller bevæge sig med konstant hastighed. Loven kaldes også *inertiens lov*.

2. lov: Den resulterende kraft på et legeme er lig med massen af legemet ganget med legemets acceleration.

3. lov: Når *et* legeme påvirker *et andet* legeme med en kraft, vil det andet legeme påvirke det første med en lige så stor - men modsat rettet - kraft. Denne lov kaldes også *loven om aktion og reaktion*.

Den 1. lov følger af den anden: hvis den resulterende kraft er **0**, er ifølge den 2. lov også accelerationen **0**, og dermed er hastigheden konstant. Man kunne derfor tro, at 1. lov er overflødig. Den tjener dog til at fastlægge, hvordan det kan ses, om et legeme er påvirket af en (resulterende) kraft eller ej: ethvert legeme, der *ikke* bevæger sig med konstant hastighed, er påvirket af kræfter. Bevægelse med konstant hastighed kræver ingen (netto-) kraft. Hvordan så eventuelle kræfter påvirker legemet, beskrives i Newtons 2. lov.
Newtons 3. lov er uundværlig, hvis vi skal analysere bevægelsen af legemer, der påvirker hinanden indbyrdes. Vi vil senere give eksempler på brugen af denne lov.

Fig.5: Den engelske fysiker sir Isaac Newton

Kommentar: Når vi taler om bevægelse, må man straks stille spørgsmålet: bevægelse *i forhold til hvad?* Er der f.eks. tale om bevægelse i forhold til jordoverfladen, bevægelse i forhold til det skib, som du sejler med, eller bevægelse i forhold til et tog, du kører med, eller måske i forhold til den karrusel, du har vovet dig op på? De forskellige *ståsteder* eller ***reference-systemer***, fra hvilke bevægelsen beskrives, er afgørende for, hvordan bevægelsen ser ud. Hvis du f.eks. står på en roterende karrusel, vil du hævde, at du ikke bevæger dig (underforstået *i forhold til karrusellen*). Men andre, der står ved siden af karrusellen, vil mene, at du kører rundt i en cirkel (underforstået: set *i forhold til jorden*). Begge parter har selvfølgelig ret. Der er blot tale om at beskrive den samme bevægelse som den ser ud fra to forskellige *reference-systemer*. De referencesystemer, hvor Newtons 2. lov uden videre kan benyttes, kaldes *inertial-systemer*.

Et inertial-system er et reference-system, der *ikke roterer* eller på anden måde er accelereret i forhold til objekter, der er meget langt borte, f.eks. i forhold til de såkaldte kvasarer (fjerne galakser). Sigteretningen til disse objekter kan (på grund af den store afstand til dem) regnes for uændret gennem lange tidsperioder. Bedømt fra et sådant system vil Newtons 1. lov være opfyldt. Denne lov kaldes derfor også *inertiens* lov.

Hvis Newtons 2. lov skal anvendes i *ikke-inertialsystemer* (f.eks. på legemer, der bevæger sig på den roterende jord, hvor jorden bruges som referencesystem), så skal man til den resulterende kraft medregne de såkaldte *fiktive kræfter*, der opstår som følge af reference-systemets acceleration eller rotation. Blandt disse kræfter er centrifugalkræfter, Corioliskræfter m.v. Vi vil ikke her gå nærmere ind på disse kræfter - men blot bemærke, at de er nødvendige f.eks. når meteorologer skal beregne luftstrømmes bevægelse, eller når havstrømmes bevægelse skal forklares.
Er der derimod tale om bevægelser af relativ kort varighed - som ved de fleste eksperimenter i fysiklaboratoriet - kan man se bort fra disse kræfters indflydelse.

Når du befinder dig i en bil, der accelererer, vil du føle, at du presses bagud mod sædet. Denne "kraft" er en af de fiktive kræfter, der opstår, fordi bilen accelererer.

Befinder du dig på en karussel, der roterer, vil du føle, at du påvirkes af en kraft, der vil slynge dig bort fra rotationsaksen - denne fiktive kraft, der kaldes centrifugalkraften, opstår som følge af karrusellens rotation. En tilsvarende "kraft" oplever du i en bil, der drejer.

Hvis du lader en kugle trille på den roterende karrusels gulv, vil du opdage, at dens bane på gulvet krummer - den "kraft", der skal forklare dette kaldes Coriolis-kraften. Banens krumning skyldes udelukkende karrusellens rotation.

Lidt historie

Siden den græske oldtid (4. århundrede før vor tidsregning) har man forsøgt at finde en forklaring på bevægelse og dens årsag. Oldtidens mest betydningsfulde fysiker, grækeren *Aristoteles* (384 - 322 fvt.) delte bevægelser op i "naturlige" og "tvungne" bevægelser. Ifølge Aristoteles falder en sten til jorden, fordi dens "naturlige" sted er ved jorden. Den vil derfor altid vende tilbage hertil, efter at den har været gennem en "tvungen" bevægelse som f.eks. et kast op i luften. Når den "tvungne" bevægelse er "brugt op", overtager den "naturlige" bevægelse, og stenen falder til jorden. Naturlige bevægelser kræver ingen forklaring - det er en egenskab indbygget i alle legemer. Derimod kræver alle "tvungne" bevægelser er kraftpåvirkning (som er bevægelsens årsag). Uden denne går bevægelsen - ifølge Aristoteles - i stå.

Men der gjaldt helt andre love for stjerner og planeter og Sol. Planeterne og Solen måtte bevæge sig i cirkelbevægelser, da man anså netop en cirkel for at være en særlig fuldkommen geometrisk figur. Og da planeterne ansås for guddommelige (planeterne er navngivet af grækerne efter de gamle græske guder), måtte de følge den mest fuldkomne figur, altså cirklen. Jorden var centrum i dette verdensbillede.
Der var altså en klar forskel i forklaringerne på bevægelser på jorden og bevægelser på himlen.

Langt op i middelalderen dannede Aristoteles tanker grundlaget for den fysiske tænkning, men fra 1300-tallet begyndte man at bryde med disse tanker.

Den polsk fødte *Nicolaus Kopernikus* (1473-1543), der var matematiker og astronom, udgav på sit dødsleje værket ”De revolutionibus orbium coelestium” (om de himmelske sfærers omdrejning) hvor han gør op med det geocentriske system. Han indfører et system, hvor Solen er i centrum af Universet (det heliocentriske system) og hvor planeterne kredser om Solen og Jorden drejer om sig selv.

Danskeren *Tycho Brahe* (1546-1601) havde med sit observatorium på øen Ven forbedret de astronomiske målemetoder, og hans tabeller over planetpositioner var grundlaget for, at den tyske astronom og mystiker *Johannes Kepler* (1571-1630) kunne opstille tre love op planeternes bevægelse (Keplers 3 love), hvoraf de to første fremkom i 1609.

Den italienske fysiker *Galileo Galilei* (1564-1642) var i stærk opposition til Aristoteles tanker. Galilei mente, at kun præcise forsøg kunne danne grundlag for en naturbeskrivelse. Han udførte selv en række forsøg, hvor han lod en kugle rulle ned ad et skråplan (denne bevægelse er en slags frit fald i "slowmotion", og herved havde Galilei bedre tid til at studere bevægelsen). Udfra sine forsøg konkluderede Galilei, at alle legemer falder lige hurtigt i lufttomt rum - og at kuglen ville rulle med konstant hastighed, hvis underlaget var vandret og uden rullemodstand. Begge konklusioner var i modstrid med Aristoteles fysik. Og da Galilei i sin selvfremstillede kikkert så Jupiter med månerne kredsende omkring sig, var også påstanden om, at jorden var universets centrum bragt i tvivl.

I 1687 udkom englænderen Isaac Newtons (1642-1727) store og betydningsfulde værk *Principia*, hvori mange af datidens problemer med at beskrive og forklare bevægelser er løst. Newton skelner ikke mellem forklaringer på bevægelser på jorden og på himlen. Alle bevægelser kan forklares udfra samme principper.

Newton var ved hjælp af Keplers 3 love for planetbevægelse i stand til opstille en formel for massetiltrækning (Newtons gravitationslov, se nedenfor), og kunne ved hjælp af denne og Newtons 3 generelle bevægelseslove vise, at det er den samme kraft, der er årsag til planeternes bevægelse og til, at f.eks. et æble falder til jorden, når det slippes. Altså ikke længere nogen opdeling i særlige "himmelske" og "jordiske" bevægelser. Newtons "naturlige" bevægelse er bevægelse med konstant hastighed eller hvile. Denne bevægelse kræver ingen kraft - og dermed heller ingen forklaring. *Alle andre* bevægelser er "tvungne", idet de kræver en kraftpåvirkning for at kunne realiseres.

5. Enkeltkræfter

Vi vil i dette afsnit behandle nogle få former for kræfter, som vi senere får brug for. De kræfter, der omtales her, er *tyngdekræfter*, *elektriske* kræfter og visse former for *gnidningskræfter*.

Tyngdekræfter

Alle legemer af fysisk art påvirker hinanden med gravitationskræfter - også kaldet tyngdekræfter. Disse kræfter er altid tiltrækkende. Størrelsen af kræfterne kan beregnes udfra Newtons gravitationslov, se nedenfor. Dels afhænger kræfternes størrelse af *afstanden* mellem legemerne, og af *stofindholdet* i hvert af legemerne. Dette stofindhold kalder vi legemets masse, og den kan principielt bestemmes på en vægt. SI-enheden for denne masse er 1 kg (kilogram). I praksis er det ikke altid muligt at veje et legeme på en vægt, f.eks. vil det være vanskeligt at veje jorden på denne måde!
Newtons gravitationslov fortæller os, at størrelsen af de tiltrækkende gravitationskræfter mellem to masser m og M i afstanden r er givet ved følgende formel:

(5.1) $$\left|\boldsymbol{F}_{\mathrm{t}}\right| = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$ Newtons gravitationslov

Konstanten G er den universelle gravitationskonstant, og den har følgende værdi:

(5.1a) $$G = 6{,}6726 \cdot 10^{-11} \, \frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}$$

Retningen af kræfterne mellem legemerne er retningen af forbindelseslinien mellem de to legemer, se fig.6 nedenfor. Ifølge Newtons 3. lov er de to kræfter lige store og modsat rettede. Forudsætningen for anvendelsen af (5.1) er, at legemerne er små i forhold til deres afstand r. Dog kan formlen også bruges på legemer, hvor masse-fordelingen er kugle-symmetrisk. I dette tilfælde skal r regnes fra kuglens centrum.

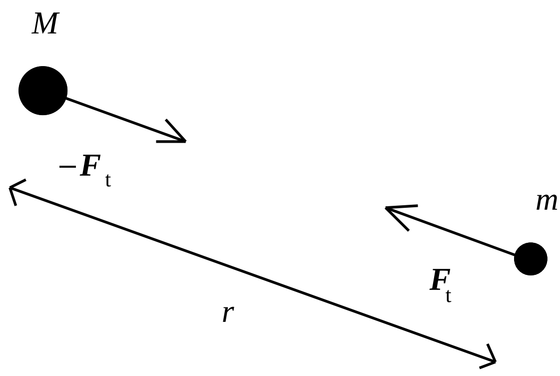


Fig.6
To masser M og m tiltrækker hinanden med gravitationskræfter

Øvelse 8
Beregn størrelsen af gravitationskraften mellem to lodder med massen 1,00 kg og 5,00 kg i den indbyrdes afstand 1,00 m. Er denne kraft mon let at måle? Hvilken acceleration vil hvert af legemerne få, forudsat, at de kun er påvirkede af de gensidige gravitationskræfter?

Hvis vi betragter et legeme tæt ved

jordens overflade, vil jordens gravitationskraft på legemet kunne beregnes af formel (5.1). Vi ser heraf, at tyngdekraften er proportional med legemets masse *m*. Derfor har vi ethvert sted på jorden følgende udtryk for tyngdekraften på et legeme med massen *m*:

(5.2)	$\boldsymbol{F}_{\mathrm{t}} = m \cdot \boldsymbol{g}$	Tyngdekraft på et legeme

Hvis jorden var kugle-symmetrisk og ikke roterede, ville proportionalitetskonstanten $\boldsymbol{g}$ i (5.2) have den samme værdi overalt på jorden, og værdien kan i dette tilfælde beregnes ved at sammenligne (5.2) med (5.1): (vi har her sat $g = |\boldsymbol{g}|$)

$$(5.3) \qquad g = G \cdot \frac{M}{r^2} = 6{,}672 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2} \cdot \frac{5{,}976 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{\left(6{,}37102 \cdot 10^{6}\,\mathrm{m}\right)^2} = 9{,}823\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$$

Her er jordens masse hentet fra databogen for fysik og kemi, og som jordens radius er anvendt en middelradius.

Imidlertid er tyngdekraften på et bestemt legeme ikke den samme overalt på jorden. Dette skyldes, at jorden *ikke* er helt kuglerund (og at jorden roterer). Dermed bliver proportionalitetskonstanten g i (5.2) afhængig af, hvor på jorden man befinder sig. Ved ækvator er $g = 9{,}78\,\mathrm{N/kg}$, ved polerne er $g = 9{,}83\,\mathrm{N/kg}$. Tyngdekraften (5.2) er altså størst ved jordens poler!

For hele Danmark kan værdien 9,82 N/kg benyttes.

Retningen af $\boldsymbol{g}$ bestemmer, hvad der er vandret og lodret på et bestemt sted. $\boldsymbol{g}$ vil være vinkelret på en stillestående væskeoverflade (når vi ikke er for tæt ved kanterne!).

For legemer, der er i bevægelse, gælder kraftudtrykket (5.2) også. Uanset i hvilken retning bevægelsen foregår, vil tyngdekraften altså stadig være rettet lodret nedad!

Med hensyn til bestemmelsen af et legemes masse på en vægt skal det bemærkes, at vægten viser et udslag, der er proportionalt med *tyngdekraften* (5.2) på legemet. Og da denne er proportional med legemets masse, kan vægten bringes til at vise denne masse. Men proportionalitetskonstanten g i tyngdekraften vil afhænge af, hvilket sted der er tale om. Derfor skal en vægt, der medbringes på charter-ferien, i princippet justeres, før den kan vise den rigtige masse på det nye sted!

> *Kommentar:*
> Det viser sig, at den masse, der kan måles på en vægt (den *tunge* masse), er den samme, der optræder i Newtons bevægelseslov (den *træge* masse, altså den modstand, et legeme gør mod at få ændret sin bevægelsestilstand - også kaldet legemets *inerti*). Der er derfor heldigvis ikke brug for to slags "masse".

Ser vi på et legeme (arten er ligegyldig), der kun er påvirket af tyngdekraften fra jorden, vil denne tyngdekraft også være den resulterende kraft på legemet. Bruger vi så Newtons bevægelseslov (3.1), kan vi bestemme legemets acceleration:

$$\boldsymbol{F}_{\text{res}} = \boldsymbol{F}_{\text{t}} \qquad \text{hvoraf}$$

$$m \cdot \boldsymbol{a} = m \cdot \boldsymbol{g}, \qquad \text{altså}$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}$$

Alle legemer vil derfor få den *samme acceleration*: nemlig $\boldsymbol{g}$, som derfor også kaldes *tyngdeaccelerationen*. SI - enheden er N/kg = $\mathrm{m/s^2}$, se (3.3). To legemer, der tabes samtidig, vil altså på alle tidspunkter have nøjagtig ens fart og være faldet lige langt!

Det skal bemærkes, at det er vanskeligt (umuligt?) at opnå, at et legeme kun er påvirket af tyngdekraften og ikke af luftmodstand, når legemet falder. Forsøget bør foregå i en beholder, der er pumpet tom for luft - så godt, som det nu kan lade sig gøre. I en sådan beholder vil et blylod og en fjer falde præcis lige hurtigt! (De første astronauter på månen udførte dette forsøg - og de to genstande faldt lige hurtigt!)

Øvelse 9 Beregn størrelsen af tyngdekraften på et legeme, der vejer 10,0 kg. Benyt den ovenfor nævnte værdi for tyngdeaccelerationen i Danmark!

Øvelse 10 Du holder et lod med massen 1 kg (i hvile) i din hånd.
a) Hvilken størrelse har legemets acceleration?
b) Hvad er størrelsen af den resulterende kraft på loddet?
c) Beregn størrelsen af tyngdekraften på loddet. Hvilken retning har den?
d) Hvilken kraft skal du påvirke loddet med? Hvilken retning har denne kraft?

Øvelse 11 En faldskærmsudspringer har massen 70,0 kg. Straks efter, at han/hun har forladt flyet, vil farten stige. Men efter kort tids fald vil farten være konstant, fordi luftmodstanden stiger med farten - inden faldskærmen udløses. Antag, at denne fart er 200 km/h. *Spørgsmålene nedenfor vedrører denne sidste situation*.
Besvar følgende spørgsmål:
a) Hvilken størrelse har udspringerens acceleration?
b) Hvad er størrelsen af den resulterende kraft på udspringeren?
c) Beregn størrelsen af tyngdekraften på udspringeren. Hvilken retning har den?
d) Hvad er luftmodstandens størrelse? Og hvilken retning har den?

Forsøg Newtons 2. lov kan eftervises ved forsøg på luftpudebane. Jordens træk i et lod udnyttes til at accelerere et system bestående af en vogn på luftpudebanen og trækloddet. Systemets to dele er forbundne med en tynd snor, se fig.7.

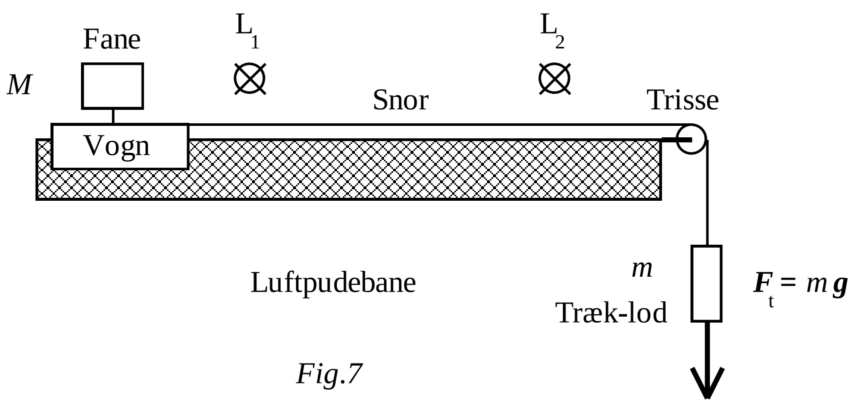


Fig.7

Idet vi regner med, at snoren ingen masse har, er *systemets* masse massen af vognen M og massen af træk-loddet m. Den resulterende kraft på systemet er tyngdekraften på trækloddet (vi tillader os at se bort fra luftmodstanden og gnidningskræfter i trissen). Herved kan systemets acceleration findes ved hjælp af Newtons 2. lov:

(5.4) $$a = \frac{F_{\text{res}}}{m_{\text{system}}} = \frac{m \cdot g}{M + m}$$

Ved at veje træklod og vogn (med fane), kan vi finde systemets *forventede* acceleration (5.4).
Systemets *faktiske* acceleration bestemmes ved at måle de to tidsrum, som fanen på vognen afbryder de to lysveje L_1 og L_2 , samt tidsrummet t, der går mellem de to afbrydelser. Måles tillige fanebredden, kan de to hastigheder ved lysvejene beregnes, og endelig kan systemets acceleration beregnes:

(5.5) $$a = \frac{v_2 - v_1}{t}$$

Denne acceleration sammenlignes endelig med den forventede, se formel (5.4).

Øvelse: Vognen på luftpudebanen er påvirket af forskellige kræfter, nemlig tyngdekraften, "bære"kraften fra luftpuden, trækket i snoren. Ligeledes er trækloddet påvirket af snorens træk. Men *ingen* af disse kræfter indgår i den resulterende kraft på systemet ifølge (5.4). Hvorfor et det kun tyngdekraften på trækloddet, der indgår her??

Elektriske kræfter

Elektriske kræfter er kræfter mellem *elektriske ladninger*. Som bekendt besidder flere elementarpartikler elektrisk ladning. Protonen har en positiv elektrisk ladning. Størrelsen af denne elektriske ladning kaldes en *elementarladning*, og betegnes med bogstavet e. Elektronen har en negativ elektrisk ladning, *minus* en elementarladning: $-e$. Derimod er neutronen elektrisk neutral.

Alle i naturen frit forekommende elektriske ladninger er et helt antal elementarladninger. Den internationale enhed (SI - enheden) for elektrisk ladning er Coulomb (C). Vi kan udtrykke størrelsen af en elementarladning i denne enhed:

(5.6) $$1e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$$ En elementarladning i Coulomb

Elektrisk ladning betegnes med bogstavet Q (eller q).

Som nævnt påvirker elektriske ladninger hinanden med kræfter: ladninger med *samme fortegn* frastøder hinanden, ladninger med *modsat fortegn* tiltrækker hinanden. Desuden afhænger kraftens størrelse af afstanden: jo større afstand, jo mindre kraft. Faktisk findes der en ret enkel formel, hvorudfra størrelsen af elektriske kræfter mellem punkt-ladninger kan beregnes:

(5.7) $|\boldsymbol{F}_{\text{el}}| = k_{\text{C}} \cdot \dfrac{|Q \cdot q|}{r^2}$ hvor $k_{\text{C}} = 8{,}99 \cdot 10^9 \ \dfrac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$ Coulombs lov

Q er den elektriske ladning på det ene legeme, *q* er den elektriske ladning på det andet legeme. *r* er afstanden mellem ladningerne. Udstrækningen af de legemer, hvorpå den elektriske ladning befinder dig, skal være lille sammenlignet med afstanden mellem legemerne.

Det bemærkes, at de to elektriske ladninger påvirker *hinanden* med lige store men modsat rettede kræfter - i overensstemmelse med Newtons 3. lov.

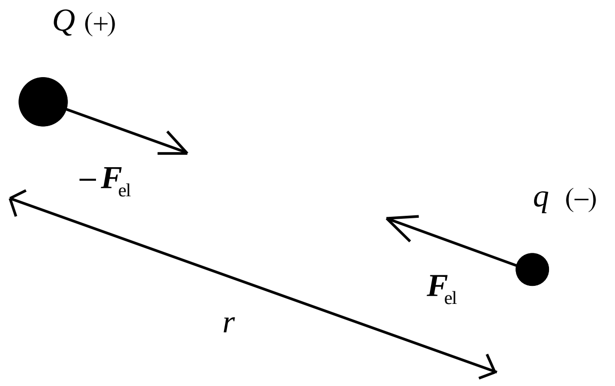


Fig.8

En positiv og en negativ elektrisk ladning tiltrækker hinanden

Øvelse 12
Beregn tiltrækningskraften mellem to elektriske ladninger med værdierne -2,0 μC og 8 μC i den indbyrdes afstand 10 cm.

Et område af rummet, hvor der virker elektriske kræfter på elektriske ladninger, kaldes *et elektrisk felt*. Et sådant felt findes f.eks. mellem de to poler på et batteri: en negativ elektrisk ladning mellem polerne vil tiltrækkes af plus-polen og frastødes af minus-polen. Dette gælder også når den elektriske ladning f.eks. er en elektron i en elektrisk leder (f.eks. en kobbertråd). Det er disse elektriske kræfter, der kan få en elektrisk strøm til at løbe i en ledning, der forbinder de to poler.

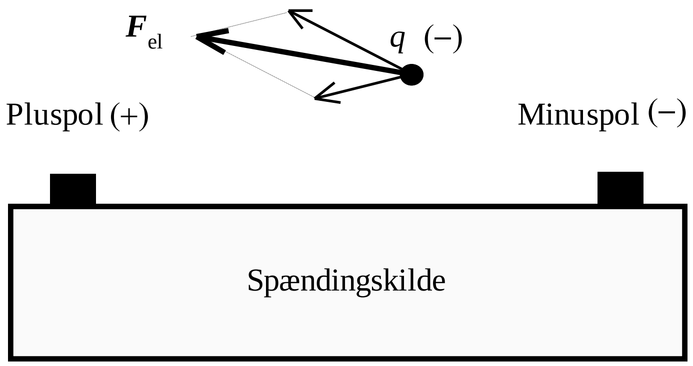


Fig.9

Mellem en spændingskildes poler er der elektriske kræfter - hvis der er elektriske ladninger i området

Gnidningskræfter

Det er ikke hensigten her at omtale alle typer gnidningskræfter. Vi kan groft taget inddele gnidningskræfter i to typer: 1) gnidning mellem faste stoffer og 2) gnidning mellem en væske/luftart og et legeme, der bevæger sig i denne væske/luftart.
Den første type gnidningskræfter er nogenlunde uafhængig af den hastighed, hvormed de to flader gnider mod hinanden, mens den sidste type er stærkt afhængig af hastigheden. Vi behandler først en model for gnidning mellem faste stoffer.

Gnidning mellem faste stoffer

Vi betragter først de tre situationer på fig.10. På fig.10a ses et legeme på et vandret underlag *i hvile* i forhold til underlaget. Legemet er påvirket af forskellige kræfter, bl.a. *underlagets kraft på klodsen*, der også kaldes *normalkraften.*, idet den er vinkelret på underlaget. Ifølge Newtons 3. lov er klodsens kraft på underlaget af samme størrelse, men modsat rettet normal-kraften. *Disse kræfters størrelse er et mål for, hvor hårdt de to flader* (nemlig klodsens underside og underlaget) *er presset sammen.* Og dermed også et mål for, hvor meget atomer-ne i de to overflader griber ind i hinanden. Kræfterne på underlaget er tegnet stiplet.

Den nedadrettede kraft *på klodsen* kan f.eks. være tyngdekraften på klodsen.

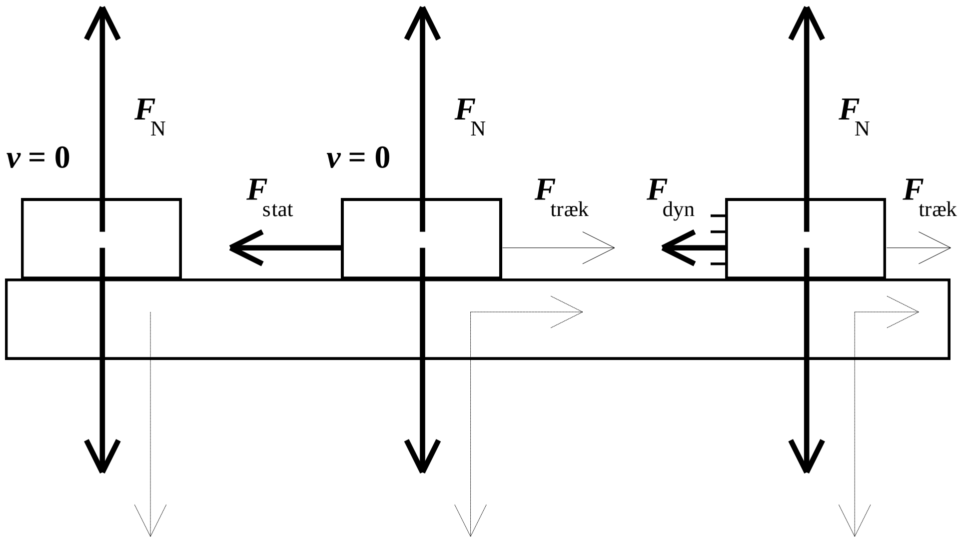


Fig.10a *Fig.10b* *Fig.10c*

Forsøger vi nu med en træk-kraft at sætte legemet i bevægelse, vil det ikke lykkes, før træk-kraftens størrelse overskrider en vis værdi, fordi de to fladers atomlag først skal løsrives fra hinanden. Den *størst* mulige modstandskraft *inden* legemet begynder at glide, kaldes den *statiske* modstandskraft, og betegnes $\boldsymbol{F}_{\text{stat}}$ som på fig.10b. *Størrelsen* af denne viser sig at være *proportional med størrelsen af normalkraften* $\boldsymbol{F}_{\text{N}}$. Altså har vi:

(5.8) $$\left|\boldsymbol{F}_{\text{stat}}\right| = \mu_{\text{stat}} \cdot \left|\boldsymbol{F}_{\text{N}}\right|$$

Proportionalitetskonstanten μ_{stat} kaldes den statiske gnidningskoefficient**Fejl! Bogmærke er ikke defineret.**. Iøvrigt er den uden enhed, og kan angives som en procentdel af normalkraftens størrelse.

Endelig viser fig.10c den situation, hvor legemet er sat i bevægelse. I denne situation er der naturligvis en gnidningskraft (den *dynamiske* gnidningskraft) mellem de to flader, og størrelsen af denne viser sig også at være proportional med størrelsen af normalkraften, sådan at vi har

(5.9) $$\left|\boldsymbol{F}_{\text{dyn}}\right| = \mu_{\text{dyn}} \cdot \left|\boldsymbol{F}_{\text{N}}\right|$$ **Coulombs gnidningslov**

Proportionalitetskonstanten μ_{dyn} kaldes den *dynamiske* gnidningskoefficient**Fejl! Bogmærke er ikke defineret.**, og er almindeligvis *mindre* end den statiske gnidningskoefficient. Grunden er, at de to gnidende flader ikke opnår den samme tætte kontakt, når de glider i forhold til hinanden, som når de er i indbyrdes hvile. Dette forhold er grunden til, at du ikke skal blokere for dine hjul, når du på cykel eller i bil ønsker at bremse så kraftigt som muligt!

Den dynamiske gnidningskoefficient er naturligvis også uden enhed, og kan også angives som en procentdel af normalkraften.

Forsøg viser, at den dynamiske gnidningskoefficient er nogenlunde *uafhængig* af hastigheden. Denne *model* for gnidningen er dog ret *grov*, og passer ikke altid lige godt med virkeligheden. F.eks. er gnidningkoefficienten ved bilkørsel ved 120 km/h *halveret* sammenlignet med gnidningskoefficienten ved 60 km/h!

Fig.10 viser iøvrigt også kræfterne på underlaget, der jo ifølge Newtons 3. lov er lige så store, men modsat rettede af underlagets kræfter på legemet - altså modsat rettede af normalkraften *og* gnidningskraften.

Når du på din cykel eller i bil skal have farten sat op eller blot overvinde luftmodstanden, vil det drivende hjul forsøge at presse vejbanen *bagud*. Herved påvirkes hjulet af en statisk (eller ved hjulspin *dynamisk*) gnidningskraft *fremad*. Her gælder det også, at du får den største fremadrettede kraft, hvis du lige netop undlader at lave hjulspin!

Øvelse 13 En klods med massen 500 g trækkes med konstant hastighed henover et vandret bord. Med et Newtonmeter måles trækkraften til 2,0 N. Beregn den dynamiske gnidningskoefficient mellem de to gnidende flader.

Øvelse 14 En bil accelererer fra hvile på vandret landevej. Den statiske gnidningskoefficient mellem bilens dæk og landevejen er 0,40. Bilens masse er 1000 kg.
a) Beregn den maksimale acceleration, bilen kan opnå på denne vej, idet vi regner med, at bilen trækker på alle 4 hjul.
b) Beregn størrelsen af den maksimale kraft, motortrækket må påvirke vejbanen med, uden at der optræder hjulspin.

Øvelse 15 En kasse øl trækkes henad gulvet. Den dynamiske gnidningskoefficient mellem ølkassen og gulvet er 0,25. Den vandrette, fremadrettede kraft er på 50 N, og kassens masse er 15 kg.
Beregn den resulterende kraft på kassen, og derefter kassens acceleration.

Eksempel Vi ser i dette eksempel på situationer, hvori der indgår gnidningskræfter og tyngdekræfter.
I *det første eksempel* foregår bevægelsen på en vandret flade (f.eks. en vandret vej). Se figur 11.

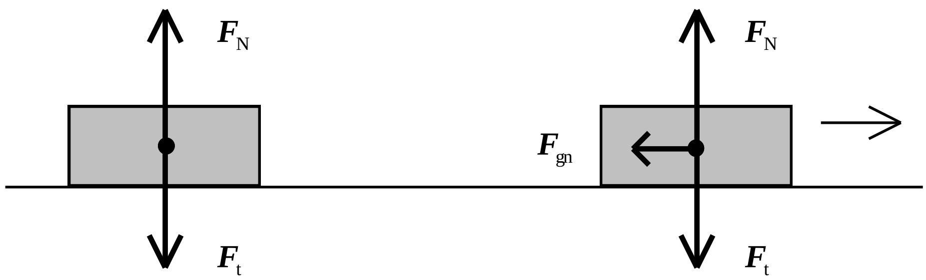


Fig. 11a: legeme i hvile *Fig. 11b: legeme i bevægelse mod højre*

Når legemet er i hvile - uden at der trækkes i det - er legemets acceleration **0**. Derfor er også den resulterende kraft på legemet **0** - ifølge Newtons 2. lov. Det medfører, at vektorsummen af de to kræfter, der påvirker legemet - nemlig tyngdekraften (der skyldes jordens tiltrækning) $\boldsymbol{F}_{\mathrm{t}}$ og normalkraften $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$ (der er underlagets påvirkning af legemet vinkelret på underlaget), må være **0**. Derfor må de to kræfter være lige store og modsat rettede:

(5.10) $$|\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}| = |\boldsymbol{F}_{\mathrm{t}}| = m \cdot g$$

Er legemet i bevægelse, er det foruden tyngdekraften og normalkraften påvirket af en gnidningskraft $\boldsymbol{F}_{\mathrm{gn}}$ - se figur 11b.

I denne situation vil tyngdekraften og normalkraften stadig tilsammen give **0**. Begrundelsen er: da legemet ikke accelererer *vinkelret på underlaget*, må den resulterende kraft(-s komposant) *i denne retning* også være **0**. Derfor må de to kræfter, der virker på tværs af bevægelsen, tilsammen give **0**. Altså er de lige store og modsat rettede.
Derimod er der ingen kræfter, der kan modvirke gnidningskraften $\boldsymbol{F}_{\mathrm{gn}}$.

Den resulterende kraft på legemet - altså summen af alle kræfterne, der påvirker legemet - bliver derfor lig med gnidningskraften:

(5.11) $$\boldsymbol{F}_{\mathrm{res}} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{gn}}$$

Gnidningskraftens størrelse er ifølge (5.9) proportional med størrelsen af normal-kraften. Derfor giver (5.11)

(5.12) $$|\boldsymbol{F}_{\mathrm{res}}| = |\boldsymbol{F}_{\mathrm{gn}}| = \mu \cdot |\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}| = \mu \cdot m \cdot g$$

Benytter vi så Newtons 2. lov, finder vi endelig:

(5.13) $$|\boldsymbol{F}_{\mathrm{res}}| = m \cdot |\boldsymbol{a}| = \mu \cdot m \cdot g \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{a}| = \mu \cdot g$$

Størrelsen af legemets acceleration er altså den dynamiske gnidningskoefficient μ ganget med tyngdeaccelerationen. Er f.eks. $\mu = 0{,}40$, bliver legemets acceleration 40% af tyngdeaccelerationen.

I *det andet og sidste eksempel* foregår bevægelsen på et skråplan**Fejl! Bogmærke er ikke defineret.**, der danner vinklen α med vandret (det kunne f.eks. være vej ned af en bakke). Se fig. 12.

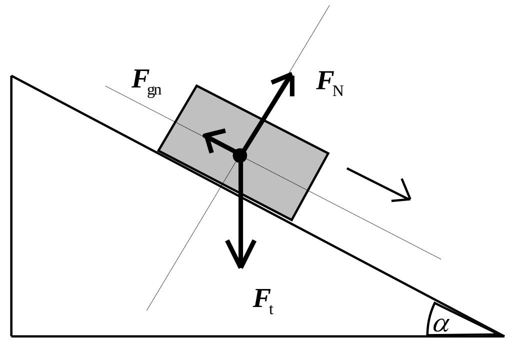


Fig. 12a: legeme i bevægelse ned af skråplan

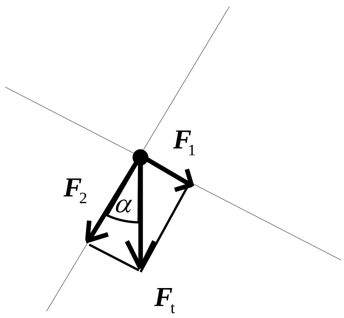


Fig. 12b: opløsning af tyngdekraften i komposanter

Legemet er nu (stadig) påvirket af tre kræfter: tyngdekraften $\boldsymbol{F}_t$, normalkraften $\boldsymbol{F}_N$, samt gnidningskraften $\boldsymbol{F}_{gn}$. Men i denne situation ophæver tyngdekraften og normalkraften ikke hinanden længere!
For at indse dette, opløser vi tyngdekraften i to komposanter $\boldsymbol{F}_1$ og $\boldsymbol{F}_2$, således at

(5.14) $\boldsymbol{F}_t = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$

Se figur 12b. Disse komposanter giver tilsammen samme virkning som tyngdekraften - derfor vil vi bruge dem *i stedet for* tyngdekraften!
Af figur 12b fremgår det, at

(5.15) $|\boldsymbol{F}_1| = |\boldsymbol{F}_t| \cdot \sin(\alpha)$ og $|\boldsymbol{F}_2| = |\boldsymbol{F}_t| \cdot \cos(\alpha)$

Da legemet ikke accelererer *vinkelret på skråplanet*, må den resulterende kraft (-s komposant) i denne retning være **0**. Derfor må normalkraften $\boldsymbol{F}_N$ og komposanten $\boldsymbol{F}_2$ tilsammen give **0**, altså er de to kræfter lige store og modsat rettede:

(5.16) $|\boldsymbol{F}_N| = |\boldsymbol{F}_2| = |\boldsymbol{F}_t| \cdot \cos(\alpha) = m \cdot g \cdot \cos(\alpha)$

Det fremgår af (5.16), at normalkraften bliver mindre, jo større vinklen α er. Ved et lodret skråplan er normalkraften **0**! (sammenlign (5.16) med (5.10))
Vi kan nu let finde størrelsen af gnidningskraften ved hjælp af (5.9) og (5.16):

(5.17) $|\boldsymbol{F}_{gn}| = \mu \cdot |\boldsymbol{F}_N| = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha)$

Ved sammenligning med (5.12) ser vi, at også gnidningskraftens størrelse reduceres med stigende vinkel α.
Endelig kan vi finde den resulterende kraft: den er vektorsummen af kraftkomposanten $\boldsymbol{F}_1$ og gnidningskraften $\boldsymbol{F}_{gn}$. Da disse modvirker hinanden, fås

(5.18) $$\left|\boldsymbol{F}_{\mathrm{res}}\right| = \left|\boldsymbol{F}_1\right| - \left|\boldsymbol{F}_{\mathrm{gn}}\right| = \left|\boldsymbol{F}_{\mathrm{t}}\right| \cdot \sin(\alpha) - \left|\boldsymbol{F}_{\mathrm{gn}}\right|$$

Indsættes nu udtrykket for gnidningskraftens størrelse (5.17) og $m \cdot g$ for tyngdekraften, får vi

(5.19) $$\left|\boldsymbol{F}_{\mathrm{res}}\right| = \left|\boldsymbol{F}_1\right| - \left|\boldsymbol{F}_{\mathrm{gn}}\right| = m \cdot g \cdot \sin(\alpha) - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha)$$

Benytter vi endelig Newtons 2. lov, finder vi af (5.19) legemets aceleration:

(5.20) $$\left|\boldsymbol{F}_{\mathrm{res}}\right| = m \cdot \left|\boldsymbol{a}\right| = m \cdot g \cdot \sin(\alpha) - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos(\alpha)$$

Altså:

(5.21) $$\left|\boldsymbol{a}\right| = g \cdot \sin(\alpha) - \mu \cdot g \cdot \cos(\alpha) = g \cdot \left(\sin(\alpha) - \mu \cdot \cos(\alpha)\right)$$

Øvelse 16: Find et udtryk for vinklen α - udtrykt ved gnidningskoefficienten μ - i det tilfælde, hvor legemets acceleratiom er 0.

Øvelse 17: Hvor stejl en gade kan du køre op ad en sommerdag, hvor gnidnings-koefficienten mellem dæk og vejbane er 0,6?

Øvelse 18: Hvorledes ændres accelerationens størrelse (5.21), hvis bevægelsen foregår *op* ad skråplanet?

Gnidning ved bevægelse i gasser eller væsker

Det er karakteristisk for disse gnidningskræfter, at de er *stærkt afhængige* af den *fart*, hvormed legemet bevæger sig i forhold til gasarten eller væsken.

Vi vil her begrænse os til at se på et eksempel (Eksamensopgaver i fysik, 1991 - 1993, redigeret), hvor gnidningskraften antages at være *proportional* med partiklens fart i luften:

Eksempel Røgen fra en skorsten indeholder støvpartikler. En af disse partikler har massen $2{,}4 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg}$. Når denne partikel bevæger sig gennem luften med farten *v*, er den påvirket af en gnidningskraft (luftmodstand) af størrelsen

(5.22) $$|\boldsymbol{F}_{\mathrm{gn}}| = (1{,}1 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{s}}{\mathrm{m}}) \cdot v$$

Vi antager, at denne støvpartikel er i en stor højde, samt at det er en dag med vindstille vejr. Partiklens begyndelsesfart er 0.
Vi vil se nærmere på denne partikels bevægelse.
Partiklen er under hele faldet mod jorden påvirket af en *konstant* tyngdekraft:

(5.23) $$|\boldsymbol{F}_{\mathrm{t}}| = m \cdot g = 2{,}4 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}82\,\mathrm{m/s^2} = 2{,}4 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N}$$

Ved starten af faldet er partiklens fart lille, derfor er gnidningskraften (5.22) også lille. Derfor er den resulterende kraft kun lidt mindre end tyngdekraften (5.23). Partiklen vil derfor accelerere - altså falde hurtigere. Men herved forøges gnidningskraften (5.22). Den resulterende kraft bliver mindre og farten stiger langsommere. Osv.
Den resulterende kraft er givet ved (5.24), se iøvrigt figuren nedenfor.

(5.24) $$|\boldsymbol{F}_{\text{res}}| = |\boldsymbol{F}_{\text{t}}| - |\boldsymbol{F}_{\text{gn}}|$$

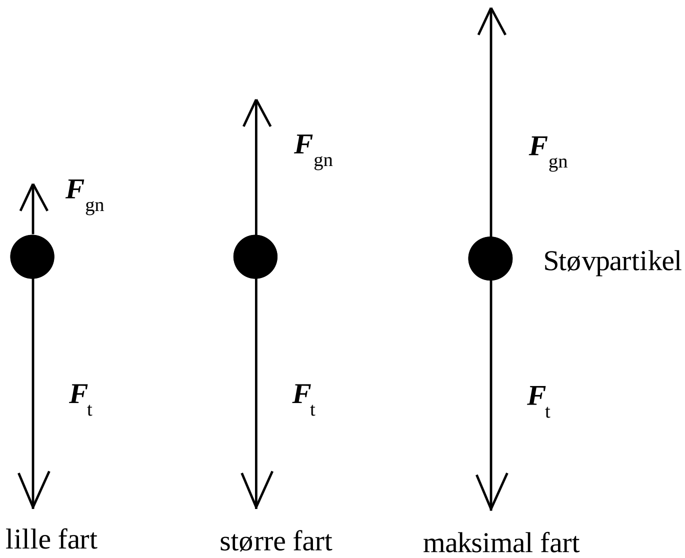


Fig.11
Figuren viser 3 billeder af støvpartiklen, der under sit fald er påvirket af den konstante tyngdekraft og gnidningskraften (luftmodstanden), hvis størrelse vokser med farten.

Fig.11

Den største fart, partiklen vil opnå, kan findes udfra betingelsen, at gnidningskraftens størrelse er lige så stor som størrelsen af tyngdekraften (dvs. $|\boldsymbol{F}_{\text{res}}| = 0$):

(5.25) $$|\boldsymbol{F}_{\text{gn}}| = |\boldsymbol{F}_{\text{t}}| \qquad \text{ved maksimal fart}$$

Indsættes (5.22) og (5.23) heri, finder vi den maksimale fart:

(5.26) $$(1{,}1 \cdot 10^{-8}\,\frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}}) \cdot v = 2{,}4 \cdot 10^{-7}\,\text{N} \qquad \text{hvoraf}$$

(5.27) $$v = \frac{2{,}4 \cdot 10^{-7}\,\text{N}}{1{,}1 \cdot 10^{-8}\,\frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}}} = 22\,\text{m/s}$$

Det fremgår af dette eksempel, at størrelsen af "trækkraften" (her tyngdekraften) bestemmer den (maksimale) fart, partiklen kan opnå. En partikel af samme udstrækning, men med den dobbelte masse, vil opnå en faldhastighed, der er det dobbelte af ovenstående.

Eksemplet ovenfor viser, at bevægelser, der er påvirket af gnidningskræfter, der vokser med farten, vil opnå en maksimal fart, når de er påvirket af en bestemt "trækkraft". Hvis gnidningskraften er *proportional* med farten, vil den maksimale fart være proportional med "trækkraften". Vi vil i ellæren møde et eksempel på dette: Ohms lov for et lederstykke. En fordobling af de elektriske kræfter på elektronerne i lederen vil fordoble elektronernes fart og dermed strømstyrken i lederen. Årsagen til dette er, at elektronerne er påvirket af en "gnidningskraft", der er proportional med elektronernes fart i lederen.

Øvelse 19 Beregn i eksemplet ovenfor størrelsen af den resulterende kraft, når farten af støvpartiklen er 20 m/s.

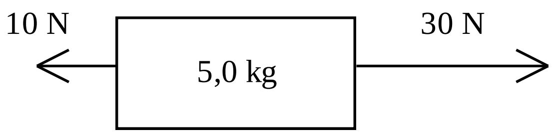
Opgaver til kræfter og Newtons love

Opgave 1 Beregn tyngdeaccelerationen på
a) månen, idet månens masse er $7{,}348 \cdot 10^{22}$ kg og middelradius er $1{,}7380 \cdot 10^{6}$ m
b) en neutronstjerne. Massen er ca. $2 \cdot 10^{30}$ kg, radius ca. 10 km.
Hvor mange gange større/mindre er disse tal sammenlignet med jordens tyngde-acceleration på $9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$?
Hvad ville du veje, hvis du tog din badevægt med til de to steder?
Er din masse også ændret tilsvarende?

Opgave 2 En tung lastbil kører med farten 180 km/h ud ad en lige, vandret landevej.
Hvilke kræfter påvirker dette køretøj?
Hvad er den resulterende kraft på bilen?

Opgave 3 En bil med massen 1200 kg kører på et tidspunkt med farten 36 km/h. Bilen sættes i frigear, og der går 30 s, før bilen standser. Idet vi regner med en konstant modstandskraft, skal du beregne størrelsen af denne.

Opgave 4 Et legeme er påvirket af to modsat rettede kræfter, se figuren nedenfor.
Beregn dette legemes acceleration.



Opgave 5 En elevator bevæger sig opad med farten 3,0 m/s.
En kvinde står på en vægt i denne elevator.
Hvad viser vægten i forhold til den situation, hvor elevatoren holder stille?
a) mere b) det samme c) mindre

Opgave 6 En mand vejer sig på sin badevægt i badeværelset. Vægten viser 80 kg. Derefter medbringer han vægten i elevatoren, og stiller sig på den.
Hvad viser vægten, hvis elevatoren accelererer opad med accelerationen $3{,}0\,\mathrm{m/s^2}$?
Tyngdeaccelerationen antages at være $9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$.

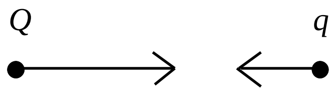
Opgave 7 Du er blevet godt gal på din nabo og stikker ham en på tuden.
Er det rigtigt, at du slår dig selv lige så meget som naboen, når du slår løs på ham? (altså: påvirkes du selv af en lige så stor kraft, som du slår med?)

Opgave 8 En mand spænder sin hest for en vogn og siger "hyp".
Men den kloge hest har læst fysik og siger til manden:
"Ifølge Newtons 3. lov er vognens træk i hesten lige så stort men modsat rettet hestens træk i vognen. Derfor nytter det ikke noget at trække, og jeg vil derfor lade være." Hvad skal manden sige til sin hest?

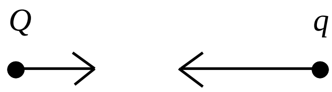
Opgave 9 To positive elektriske ladninger Q og q påvirker hinanden med kræfter. Det oplyses, at $Q = 2 \cdot q$.
Hvilken af følgende figurer viser bedst de kræfter, som de påvirker hinanden med?

a) 

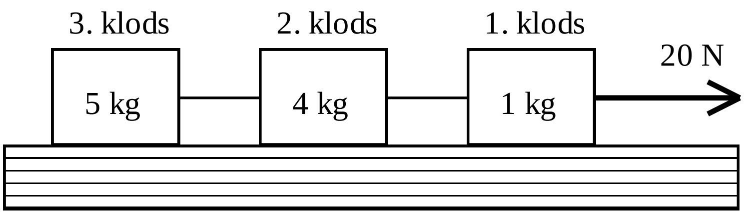
b) 

c) 

d) 

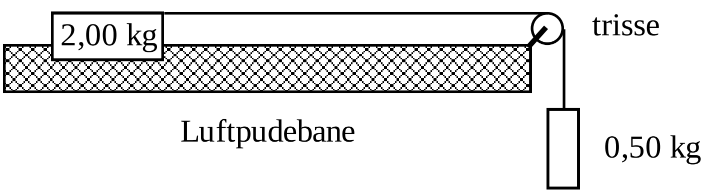
e) 

Opgave 10 Tre klodser er forbundne med snore. De trækkes på et vandret, glat underlag med en kraft på 20 N, som figuren nedenfor viser. Hvad er størrelsen af den resulterende kraft på klods nr. 2?

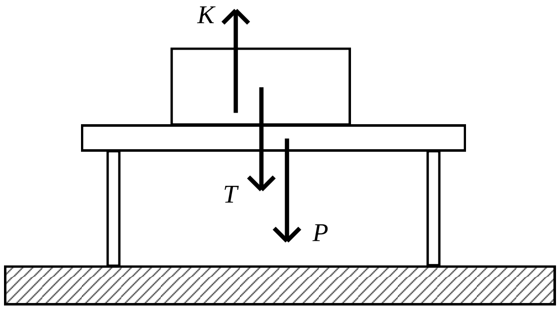


Opgave 11 Et lokomotiv, der vejer 100 t, trækker 4 vogne, hver med massen 50 t. Togstammens acceleration er $0{,}50\,\mathrm{m/s^2}$.
Hvor store er de kræfter, der påvirker træk-krogene?

Opgave 12 En vogn med massen 2,00 kg bevæger sig gnidningsløst på en vandret luftpudebane under påvirkning af en (masseløs) snor, der er forbundet til et træk-lod med massen 0,50 kg. Beregn lod-*systemets* acceleration.



Opgave 13 En klods ligger i hvile på et bord. Se figur.



Ved behandlingen af denne situation taler vi om følgende kræfter:

- Jordens tyngdekraft på klodsen *T*.
- Klodsens kraftpåvirkning af bordoverfladen *P*.
- Bordets kraft mod klodsen *K*.

På figuren ovenfor er kræfterne indtegnede lidt forskudt for hinanden for at de kan ses enkeltvis.
Hvilke(n) af følgende påstande er korrekt(e)?

a) Klodsen ligger stille, fordi *P* og *K* ophæver hinanden.
b) Klodsen ligger stille, fordi *T* og *K* ophæver hinanden.
c) *T* og *K* er aktion og tilhørende reaktion, jævnfør Newtons 3. lov.
d) Bordet er, foruden sin egen tyngde, kun påvirket af *P*.
e) *P* og *K* er aktion og tilhørende reaktion.
f) Hvis *T* kaldes aktion, er den tilhørende reaktion ikke vist.

Opgave 14 To drenge vil forsøge at trække en snor over. Først trækker de i hver sin ende af snoren. Derefter binder de den ene ende fast i et træ og trækker begge to i den anden ende. Hvilken af de to metoder er den mest effektive?

Opgave 15 En bil bremser på vandret vej, så hjulene blokerer. Gnidningskoefficienten er 0,50 mellem dæk og vejbane.
a) Beregn størrelsen af bilens acceleration.
Denne bil kører lidt senere ned ad en stejl bakke, bakkens hældning med vandret er 30°. Gnidningskoefficienten er den samme som før.
b) Beregn atter størrelsen af bilens acceleration ved bremsning, så hjulene blokerer.
Senere igen kører bilen op ad bakken og bremser igen, så hjulene blokerer.
c) Beregn også i denne situation størrelsen af bilens acceleration.

Kræfters arbejde og energi

1. Kræfters arbejdeFejl! Bogmærke er ikke defineret.

Når vi til daglig taler om arbejde, er det ikke altid i den betydning, vi vil anvende her. Når vi her taler om en krafts arbejde, skal der ske en *flytning* af det objekt, som kraften virker på. I modsat fald er arbejdet 0. Det er ikke i overensstemmelse med den måde, vi til daglig taler om arbejde: bare det at *holde* en tung ting løftet vil vi jo kalde et "hårdt arbejde". Men nu til definitionen på en krafts arbejde:

En (konstant) kraft $\boldsymbol{F}$ udfører et arbejde på det legeme, den virker på, såfremt legemet forskydes stykket $\Delta\boldsymbol{s}$, og dette arbejde er defineret ved:

(1.1)	$A = \lvert\boldsymbol{F}\rvert\cdot\lvert\Delta\boldsymbol{s}\rvert\cdot\cos(\alpha)$	**En krafts arbejde**

Her er størrelsen α vinklen mellem kraften og forskydningens retning. Funktionen cos kender du forhåbentlig fra matematikundervisningen, ellers se hjælpeboksen på næste side! Cosinus er et *tal* mellem -1 og 1 (ingen enhed!). Arbejdet A er et *tal* - ikke en vektor!

Fra definitionen (1.1) ser vi, at SI - enheden for arbejde er N·m. Denne enhed kaldes også en Joule (1 J). Vi har altså:

(1.2) SI-enhed for arbejde: N·m = J

På figur 1 nedenfor ser vi en illustration til definitionen (1.1).

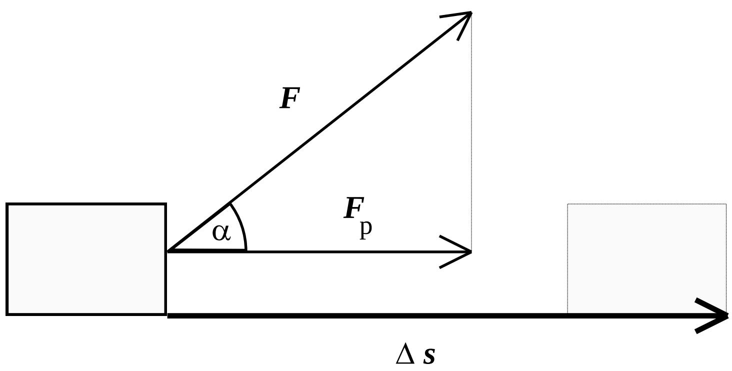


Fig.1

Vi ser af fig.1, at kraften $\boldsymbol{F}$ har en *projektion* $\boldsymbol{F}_p$ på forskydningen $\Delta\boldsymbol{s}$ af størrelsen $\lvert\boldsymbol{F}_p\rvert = \pm\lvert\boldsymbol{F}\rvert\cdot\cos(\alpha)$, fortegnet afhænger af, om $\cos(\alpha)$ er positiv eller negativ, altså om vinklen α er mindre eller større end 90°. Dette kan indsættes i definitionen på arbejde (1.1), og vi får:

(1.3) $A = \pm\lvert\boldsymbol{F}_p\rvert\cdot\lvert\Delta\boldsymbol{s}\rvert$

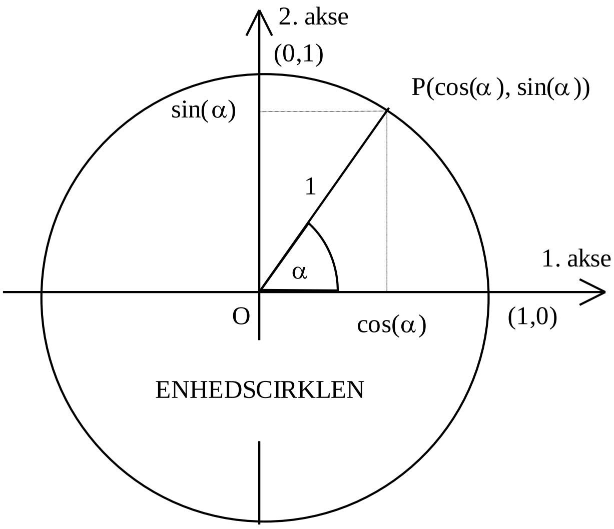
Fortegnet plus (+) vælges, hvis $\boldsymbol{F}_p$ er *ensrettet* (parallel og samme retning) med $\Delta\boldsymbol{s}$, fortegnet minus (–) hvis $\boldsymbol{F}_p$ er *modsat rettet* $\Delta\boldsymbol{s}$.

Vi ser af definitionen (1.1), at

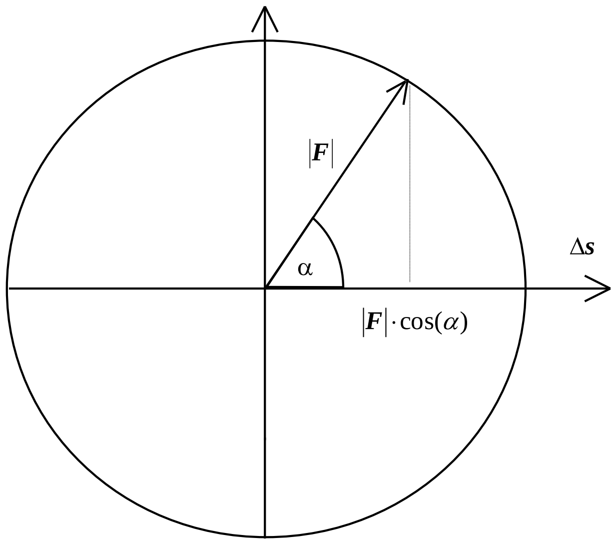
$$(1.4) \qquad \begin{array}{lll} A \text{ er positiv} & \text{, hvis} & 0° \le \alpha < 90° \\ A \text{ er } 0 & \text{, hvis} & \alpha = 90° \\ A \text{ er negativ} & \text{, hvis} & 90° < \alpha \le 180° \end{array}$$

idet jo fortegnet for arbejdet er bestemt af fortegnet for $\cos(\alpha)$.

Matematisk hjælpeboks



Definition af cosinus til vinklen α.
Cosinus til vinkelen α er 1. koordinaten til det punkt, som vinklens venstre vinkelben afskærer på enhedscirklen. Dermed er cos(α) projektionen af liniestykket OP på 1.aksen.



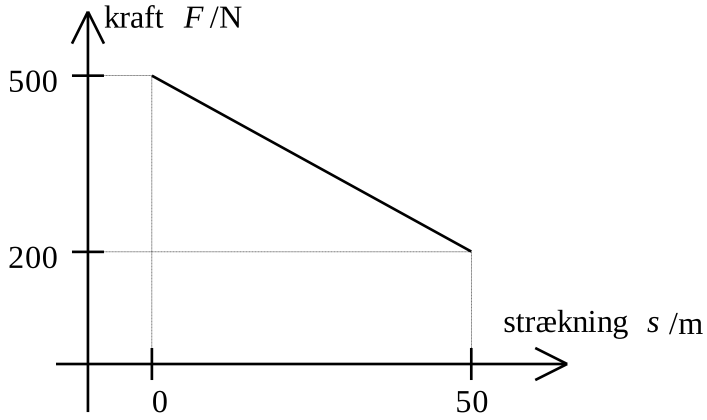
Denne figur viser projektionen af kraften $\boldsymbol{F}$ *ned på forskydningsvektoren* $\Delta\boldsymbol{s}$
Det ses, at størrelserne fra enheds-cirklen blot er ganget med kraftens størrelse $|\boldsymbol{F}|$

Øvelse 1 Beregn det arbejde, som du skal udføre på en slæde, idet du trækker skråt opad i snoren til slæden med en kraft på 20,0 N, og du skal trække slæden 400 m vandret fremad. Vinklen mellem snoren og vandret er 30°.
Antag, at slæden hele tiden bevæger sig med den samme fart. Hvad er der mon blevet af alt dit gode arbejde?

Øvelse 2 Antag, at du forsøger at stoppe en frembrusende tyr. Du skubber på tyrens horn mod tyrens bevægelsesretning med en kraft på 600 N. Ikke desto mindre bevæger tyren sig 50 m frem. Beregn det arbejde, du har udført på tyren.

Hvis kraften *ikke* er konstant under forskydningen af legemet, må vejstrækningen deles op i så små dele, at kraften er næsten konstant på de mindre forskydninger. Dernæst findes så arbejdet for hver lille forskydning, og til sidst lægges alle disse små arbejder sammen.

Øvelse 3 En stærk mand trækker en lastbil 50 m frem. Imidlertid bliver staklen mere og mere afkræftet undervejs, derfor falder også den kraft, han trækker med. På figuren nedenfor ses, hvordan kraften F aftager med vejstrækningen s. Overvej, hvordan du vil finde denne mands arbejde på lastbilen. (Ved starten er kraften 500 N, til slut 200 N).



Kommentar til arbejdsbegrebet:
Ser vi på definitionen af fysisk arbejde (1.1), er arbejdet 0, hvis der ikke sker en flytning af det legeme, som kraften virker på. Eksempelvis er en vægtløfters arbejde 0 på de vægte, som han/hun holder (i ro) over sit hoved. Dette er ikke i overensstemmelse med den sædvanlige opfattelse af arbejde! Sveden springer jo frem på panden af denne idrætsudøver.

Det er her vigtigt at forstå, at selvom vægtløfteren ikke udfører noget fysisk arbejde på vægtene, foregår der en betydelig *energiomsætning* i vægtløfterens muskler. Ellers kunne *muskelspændingen* ikke holdes. Men denne energiomsætning fører kun til *varmeudvikling* i idrætsudøveren - ikke til fysisk arbejde på vægtene.

Fysisk arbejde er altså ikke det samme som sved på panden! Der skal ske en flytning af det objekt, som kraften virker på - ellers er arbejdet 0.
Iøvrigt er det *højst* 25% af energiomsætningen i musklerne, der kan omsættes til fysisk arbejde.

Hvis der er flere kræfter, der påvirker et legeme, kan den samlede kraft findes ved at lægge kræfterne sammen som beskrevet i forrige kapitel om kræfter. Hvis der f.eks. er 3 kræfter, der påvirker legemet, bliver den samlede kraft

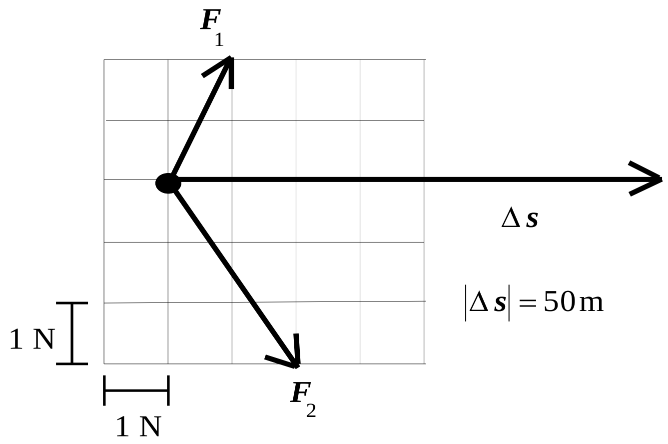
(1.5) $$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3$$

Ligesom den samlede kraft kan findes som summen af enkeltkræfterne, kan den samlede krafts arbejde findes som summen af enkeltkræfternes arbejder:

(1.6) $$A = A_1 + A_2 + A_3$$ Flere kræfters arbejde

Dette kan vises udfra definitionen på arbejde (1.1).

Øvelse 4 Betragt figuren nedenfor. Et legeme er påvirket af to kræfter $\boldsymbol{F}_1$ og $\boldsymbol{F}_2$ (det indtegnede koordinatsystem gælder kun for disse kræfter). Kræfterne er konstante i størrelse og retning under forskydningen $\Delta\boldsymbol{s}$ af legemet.
Beregn arbejderne A_1 og A_2 hver for sig for de to kræfter $\boldsymbol{F}_1$ og $\boldsymbol{F}_2$ under forskydningen på 50 m.
Find ligeledes den samlede kraft $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$ og indtegn denne kraft på figuren.
Find endelig denne krafts arbejde A under forskydningen. Kontrollér, om $A = A_1 + A_2$.



Det er ofte af interesse hvor *hurtigt* et arbejde finder sted. Derfor har man indført størrelsen *effekt***Fejl! Bogmærke er ikke defineret.**, der er et mål for netop dette: effekt er arbejde pr. tidsenhed.

(1.7)	$P = \dfrac{A}{\Delta t}$	**Effekt = arbejde pr. tid**

SI-enheden for effekt er W (Watt), og 1W = 1J/s.

2. Kræfters arbejde og kinetisk energiFejl! Bogmærke er ikke defineret.

Ifølge Newtons 2. lov er det den resulterende kraft, der bestemmer et legemes acceleration og dermed ændringen af legemets hastighed. Som vi nu skal se, har det konsekvenser for *den resulterende krafts arbejde* A_{res}.
Men først definerer vi, hvad vi forstår ved *et legemes bevægelses-energi:*

(2.1)	$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$	Et legemes bevægelsesenergi**Fejl! Bogmærke er ikke defineret.**

Her er *m* legemets masse, *v* legemets fart. SI-enhederne i denne ligning er $\text{J} = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$.

Øvelse 5 Vis, at disse enheder passer med definitionen af 1 J under en krafts arbejde.

Øvelse 6 Beregn den kinetiske energi af en bil med massen 800 kg og farten 72 km/h.

Herefter kan vi formulere den såkaldte *arbejdssætning*:

(2.2)	$\Delta E_{\text{kin}} = A_{\text{res}}$	Arbejdssætningen**Fejl! Bogmærke er ikke defineret.**

Altså: *tilvæksten i et legemes bevægelsesenergi er lig med den resulterende krafts arbejde.* Den resulterende kraft ændrer på legemets fart og dermed legemets bevægelsesenergi.

Arbejdssætningen kan vises på denne måde:
Bevægelsen antages at foregå langs en ret linie, langs hvilken også den resulterende kraft er rettet. Vi vil kun vise sætningen i dette specialtilfælde.
Vi antager, at et legeme med massen *m* er påvirket af en konstant resulterende kraft F_{res} .
Legemets acceleration *a* vil så være konstant ifølge Newtons 2. lov, og derfor vil hastigheden stige/falde jævnt med tiden. Begyndelseshastigheden kaldes v_0 og hastigheden til tiden *t* kaldes *v*. Legemets *gennemsnits*hastighed i tidsrummet fra tiden 0 til tiden *t* er

(2.3) $v_{\text{m}} = \frac{1}{2}(v + v_0)$ gennemsnitshastighed

Dermed bliver den tilbagelagte vejstrækning (positionsændring):

(2.4) $\Delta s = v_{\text{m}} \cdot t = \frac{1}{2}(v + v_0) \cdot t$

Udnytter vi Newtons 2. lov $F_{\text{res}} = m \cdot a$, og desuden at accelerationen *a* er givet ved, $a = (v - v_0)/t$ kan den resulterende krafts arbejde udregnes på følgende måde:

(2.5) $$A_{\text{res}} = \pm|\boldsymbol{F}_{\text{res}}| \cdot |\Delta s| = m \cdot \frac{v - v_0}{t} \cdot \frac{1}{2}(v + v_0) \cdot t = \frac{1}{2} m(v^2 - v_0^2) = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

Hermed er arbejdssætningen (2.2) vist!
Arbejdssætningen kan f.eks. bruges til at beregne et legemes slutfart, hvis vi kender begyndelsesfarten, massen af legemet og kan udregne kraftens arbejde.

Eksempel En motorcykel med massen 300 kg (inklusiv passager) har på et tidspunkt farten 30 m/s. Motorcyklen påvirkes af en resulterende kraft i fremadgående retning af størrelsen 500 N. Hvad er farten efter 100 m?

Svar:
Vi vil anvende arbejdssætningen til beregningen på følgende måde:
ændringen af den kinetiske energi er givet ved udtrykket

(2.6) $$\Delta E_{\text{kin}} = E_{\text{kin, efter}} - E_{\text{kin, før}} = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2$$

hvor v er den ukendte slutfart og v_0 er den kendte begyndelsesfart.
Den resulterende krafts arbejde findes udfra definitionen på arbejde:

(2.8) $$A_{\text{res}} = |\boldsymbol{F}_{\text{res}}| \cdot |\Delta \boldsymbol{s}|$$

Vi sætter (2.6) lig med (2.8), og får

(2.9) $$\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = |\boldsymbol{F}_{\text{res}}| \cdot |\Delta \boldsymbol{s}|$$

Her er kun slutfarten v ukendt. Derfor vil vi isolere denne af ligningen og indsætte de kendte tal i slutformlen.

(2.10) $$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = |\boldsymbol{F}_{\text{res}}| \cdot |\Delta \boldsymbol{s}| \\ &\Leftrightarrow \\ &v^2 - v_0^2 = \frac{|\boldsymbol{F}_{\text{res}}| \cdot |\Delta \boldsymbol{s}|}{\tfrac{1}{2}m} \\ &\Leftrightarrow \\ &v = \pm\sqrt{v_0^2 + \frac{|\boldsymbol{F}_{\text{res}}| \cdot |\Delta \boldsymbol{s}|}{\tfrac{1}{2}m}} \end{aligned}$$

Da farten er positiv, vælges den positive løsning, og tallene fra opgaven indsættes:

(2.11) $$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{|\boldsymbol{F}_{\text{res}}| \cdot |\Delta \boldsymbol{s}|}{\tfrac{1}{2}m}} = \sqrt{(30\,\frac{\text{m}}{\text{s}})^2 + \frac{500\,\text{N} \cdot 100\text{ m}}{\tfrac{1}{2} \cdot 300\,\text{kg}}} = 35\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Hermed er det ønskede resultat fundet.

Øvelse 7 Kontrollér, at enhederne i ovenstående ligning (2.11) passer sammen!

Øvelse 8 En cyklist har begyndelsesfarten 0. I løbet af en strækning på 20 m er farten oppe på 36 km/h. Cyklistens masse inklusiv cykel er 70 kg. Beregn størrelsen af den resulterende kraft, som påvirker cyklisten, idet vi antager, at den er konstant.

3. Kræfters arbejde og potentiel energiFejl! Bogmærke er ikke defineret.

Som vi nu skal se er det også muligt at definere andre former for energi end bevægelsesenergi. Denne nye form for energi kan - efter behag - omsættes til kinetisk energi. Derfor kaldes den *potentiel* energi, idet ordet potentiel betyder mulig. Det er altså muligt at omsætte denne energiform til andre energiformer. Undertiden tales også om *oplagret* energi. Vi vil her i første omgang holde os til potentiel energi i et tyngdefelt, f.eks. jordens tyngdefelt. Det forudsættes, at der er tale om et såkaldt *homogent* kraftfelt**Fejl! Bogmærke er ikke defineret.**, dvs. tyngdekræfterne på et legeme har samme retning og størrelse, uanset hvor dette legeme befinder sig.
For jordens tyngdefelt er dette nogenlunde opfyldt, hvis man begrænser sig til områder af rummet, der strækker sig nogle få km vandret og tilsvarende i højden. (Tyngdekraften er formindsket med ca. 1% i 30 km^{S} højde).
Men nu til definitionen på potentiel energi (se fig.2):

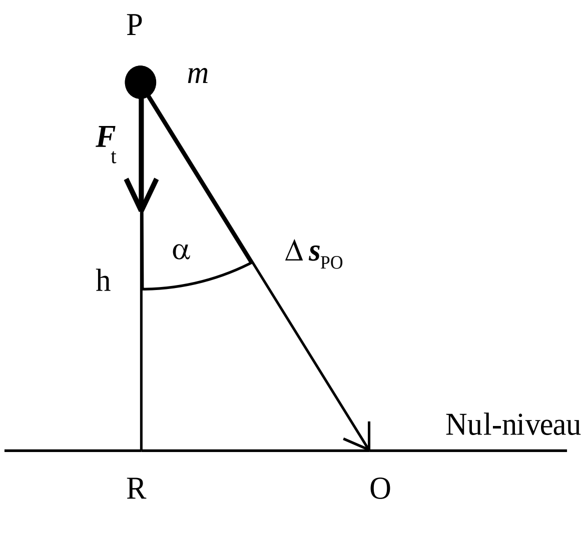


Fig.2

Ved den potentielle energi i punkt P for legemet med masse *m* forstås *tyngdekraftens arbejde* ved legemets flytning fra punkt P til det *valgte* nulniveau for potentiel energi, her punktet O.

Definition af potentiel energi:

(3.1) $E_{\text{pot}}(\text{P}) = A_{\text{t}}(\text{P} \to \text{O})$

Vi bruger nu definitionen på arbejde:

(3.2) $E_{\text{pot}}(\text{P}) = |\boldsymbol{F}_{\text{t}}| \cdot |\Delta s_{\text{PO}}| \cdot \cos(\alpha)$

Dette udtryk kan skrives enklere, idet det fremgår af fig.2, at $h = |\Delta s_{\text{PO}}| \cdot \cos(\alpha)$, hvor *h* er *højdeforskellen* mellem punkt P og O. Altså finder vi følgende udtryk for den potentielle energi i punkt P:

(3.3) $E_{\text{pot}}(\text{P}) = |\boldsymbol{F}_{\text{t}}| \cdot h = m \cdot g \cdot h$ **Potentiel energi i tyngdefelt**

Her har vi benyttet, at tyngdekraftens størrelse er $|\boldsymbol{F}_t| = m \cdot g$, hvor g er tyngdeaccelerationens størrelse på stedet.

Den potentielle energi (3.3) er en energi, der tillægges *systemet* bestående af jorden og det pågældende legeme: den er udelukkende bestemt af den afstand h, der adskiller disse to legemer.

Det bemærkes, at udtrykket (3.3) også er tyngdekraftens arbejde, når legemet flyttes fra P til R. Og at tyngdekraftens arbejde fra R til O er 0, fordi kraften er vinkelret på forskydningen. Altså er tyngdekraftens arbejde det samme, uanset om den direkte vej mellem P og O følges, eller vejen over punkt R til punkt O følges. Denne egenskab er karakteristisk for de såkaldte *konservative kraftfelter**Fejl! Bogmærke er ikke defineret.***:

(3.4)	**I et konservativt kraftfelt er *kraftens arbejde* uafhængigt af, hvilken vej der følges mellem to punkter**

Herved bliver definitionen af potentiel energi (3.1) også uafhængig af, hvilken vej der følges mellem et punkt og det valgte nulpunkt.

Af andre konservative felter kan nævnes det *elektriske kraftfelt* omkring en elektrisk ladning, eller *fjederkræfterne* i en elastisk fjeder.

Selve ordet *konservativ* betyder *bevarende*. Som vi vil se senere, er det den *mekaniske energi*, der er bevaret ved bevægelse i et konservativt kraftfelt. Den mekaniske energi er summen af den potentielle energi og den kinetiske energi. Mere om dette senere!

Eksempler på *ikke*-konservative kræfter er *gnidningskræfter*, hvor arbejdet bestemt ikke er uafhængigt af den fulgte bane mellem to punkter. Tænk f.eks. på, hvordan du skal slide i det for at overvinde gnidningskræfterne i lejerne på en rusten gammel cykel, som du kører på til skole. Her er det ikke ligegyldigt, om du kører en omvej på 50 km, inden du når skolen!

Gnidningskræfterne "stjæler" ofte bevægelsesenergi - de virker altså bremsende på bevægelser.

Men de er også nødvendige ved igangsætning af mange former for bevægelse, f.eks. ville du ikke kunne få gang i din cykel, hvis der ikke var nogen friktion mellem dæk og vejbane!

Øvelse 9 Beregn den potentielle energi af et legeme med massen 1000 kg, der befinder sig 5,00 m over jorden. Nulniveau.er jordoverfladen. Tyngdeaccelerationen er på det pågældende sted $9,82\,\mathrm{m/s^2}$.

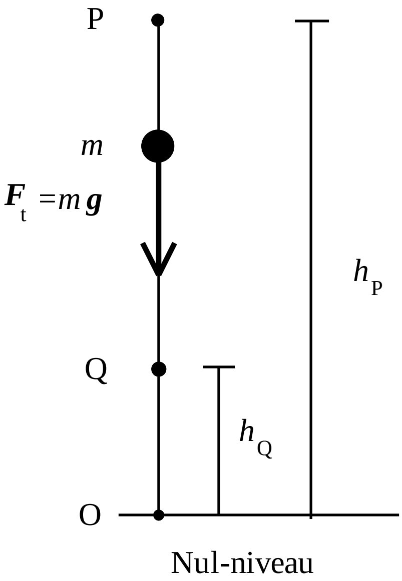


Fig.3

Da potentiel energi i et punkt er defineret som *feltkraftens arbejde*, når legemet bevæges fra punktet til det valgte nul-punkt, er der en enkel sammenhæng mellem det arbejde, som feltkraften udfører, når legemet bevæges mellem to forskellige punkter, og tilvæksten i potentiel energi. Denne sammenhæng ser vi nu nærmere på - vi skal bruge sammenhængen i afsnittet om mekanisk energi.

Betragt figur 3. Legemet med masse m flyttes fra punkt P til punkt Q. Det lodrette stykke, som legemet herved er bevæget, er højdeforskellen $h_P - h_Q$.
Herved har tyngdekraften udført arbejdet

(3.5) $$A_t = m \cdot g \cdot (h_P - h_Q)$$

Derimod er tilvæksten i potentiel energi givet ved

(3.6) $$\Delta E_{pot} = E_{pot}(Q) - E_{pot}(P) = m \cdot g \cdot h_Q - m \cdot g \cdot h_P$$

eller, når $m \cdot g$ sættes uden for parentes:

(3.7) $$\Delta E_{pot} = m \cdot g \cdot (h_Q - h_P)$$

Ved at sammenligne (3.5) og (3.7) ses, at

(3.8) $\boxed{A_t = -\Delta E_{pot}}$ feltkraftens arbejde = tabet i potentiel energi

Resultatet (3.8) kan udtrykkes på følgende måde: tyngdekraftens arbejde er lig med *tabet* i potentiel energi. Tænk lige over det!
Dette resultat - altså (3.8) - gælder for *alle* konservative kraftfelter, selvom vi her kun har betragtet tyngdekraften.

(Vi kunne også have benyttet definitionen (3.1) direkte til at vise (3.8) på følgende måde:

$$\begin{aligned} A_t(P \to Q) &= A_t(P \to O) + A_t(O \to Q) = A_t(P \to O) - A_t(Q \to O) \\ &= E_{pot}(P) - E_{pot}(Q) = -\Delta E_{pot} \end{aligned}$$

Her har vi *ikke* benyttet det særlige udtryk (3.3) for den potentielle energi - resultatet gælder derfor for *alle* konservative felter)

Øvelse 10 Udregn tyngdekraftens arbejde, når et legeme med massen 1,00 kg sænkes fra højden 8,00 m til 3,00 m. Udregn ligeledes tilvæksten i potentiel energi.

Og *tabet* i potentiel energi. Hvad ser du ved at sammenligne disse?
Tyngdeaccelerationen er $9{,}82\, \mathrm{m}/\mathrm{s}^2$.

4. Kræfters arbejde og energiomsætninger Fejl! Bogmærke er ikke defineret.

Det kan helt generelt siges, at kræfter, der udfører arbejde, altid omdanner en energiform til en eller flere andre energiformer. Under arbejdet sker omdannelsen af energien. F.eks. siger arbejdssætningen (2.2), at vi til gengæld for udført (netto-)arbejde får en forøget bevægelses-energi. Udførelsen af dette arbejde *koster* energi. Er det f.eks. dig selv, der udfører arbejdet, skal du omsætte mere kemisk energi (føde!) for at udføre arbejdet. Tænk f.eks. på det arbejde, du udfører, når du knokler afsted på din cykel! Ved dette arbejde bliver du også hurtigere sulten - og energilageret må fyldes op igen!

Vi har altså:

(4.1)	Ved energiomdannelser kan en del af energien omsættes til arbejde.

Dette arbejde kan så udnyttes til dannelse af nye energiformer.

Vi vil nævne nogle flere eksempler på dette:

Eks. 1 I et batteri er oplagret kemisk energi. En del af denne kemiske energi**Fejl! Bogmærke er ikke defineret.** kan (via de kemiske processer) omdannes til elektrisk energi, som opstår ved, at de kemiske kræfter *adskiller* elektriske ladninger af modsat fortegn. De elektriske kræfter, der herved opstår mellem batteriets poler, kan vi få til at udføre arbejde for os. F.eks. kan et batteri levere bevægelsesenergi til et legetøjstog via en lille elmotor. Eller også kan de elektriske kræfters arbejde omsættes til varmeenergi og lysenergi, som det sker i en glødelampe.

Eks. 2 På et sædvanligt kraftværk eller kernekraftværk udfører varm damp ved højt tryk arbejde på turbine-bladene (svarende til vingerne på en vindmølle) og bringer herved generatoren i rotation, hvorved dampens arbejde kan omdannes til elektrisk energi. Dampens indhold af varmeenergi ved høj temperatur omdannes herved til elektrisk energi - og varmeenergi ved lav temperatur.

Eks. 3 Hos forbrugeren kan de elektriske kræfter, som elværket stiller til rådighed, bringes til at udføre arbejde. Mulighederne er mange, f.eks. kan kræfternes arbejde udnyttes i husholdningsmaskiner såsom en food-processor, en røremaskine m.v. I disse maskiner bruges den elektriske energi til at få en lille elektro-motor til snurre rundt og udføre arbejde på forskellige føde-emner. Forbrugeren kunne naturligvis selv udføre dette arbejde med håndkraft, men mange vælger at lade de elektriske kræfter udføre arbejdet og så betale for arbejdet via el-regningen!
Ved elvarme omdannes de elektriske kræfters arbejde direkte til varmeenergi.

Eks. 4 På et vandkraftværk udfører tyngdekraften arbejde på de vandmasser, der strømmer ned gennem kraftværket. Herved kan turbinen bringes i rotation og der kan frembringes elektrisk energi i den generator, som turbinen trækker rundt.
Tyngdekraftens arbejde på en vandmængde med massen Δm, og hvis højdeændring er h, kan let udregnes udfra definitionen på arbejde (se fig. 4)

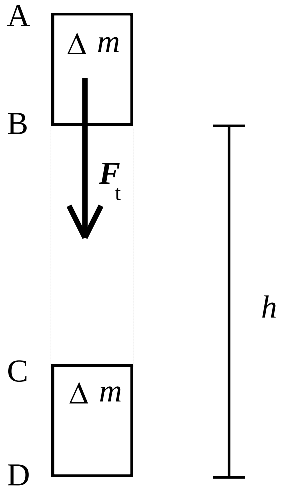


Fig.4

Tyngdekraftens arbejde er

(4.2) $$A_t = |\boldsymbol{F}_t| \cdot h = \Delta m \cdot g \cdot h$$

Ofte er vi interesserede i arbejdet pr. tidsenhed. Kalder vi den tid, som vandmængden Δm er om at passere kraftværket, for Δt, bliver arbejdet pr. tidsenhed (effekten P)

(4.3) $$P = \frac{A_t}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot g \cdot h$$

Hvis f.eks. højdeforskellen på det vandreservoir, som forsyner kraftværket med vand, og kraftværket, er 50 m, tyngdeaccelerationen er 9,82 $\mathrm{m/s^2}$, og der passerer 10 $\mathrm{m^3}$ vand pr. sek. gennem kraftværket, bliver kraftværkets maksimale effekt:

$$P = \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot g \cdot h = 10 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/s} \cdot 9{,}82\ \mathrm{m/s^2} \cdot 50\ \mathrm{m} = 4{,}9\ \mathrm{MW}$$

Denne effekt er den "hast", hvormed tyngdekraften udfører arbejde. Det er i praksis ikke muligt at omsætte denne 100% til elektrisk energi.
På vandkraftværket omdannes vandets *potentielle energi* - via tyngdekræfternes arbejde på turbinebladene - til *rotationsenergi* i generatorens rotor og lidt *gnidningsvarme i lejerne* - og rotationsenergien omsættes for en stor dels vedkommende til *elektrisk energi*.

Det har måske undgået læserens opmærksomhed, at vi faktisk har "snydt" lidt i begrundelsen for arbejdet (4.2). Tyngdekraften udfører arbejde på *hele* vandsøjlen mellem A og C, idet vandsøjlen forskydes stykket AB (eller CD). Derfor burde vi udregne arbejdet som massen af *hele* vandsøjlen mellem A og C, ganget med tyngdeaccelerationen og ganget med den *lille* forskyning AB. I stedet har vi i (4.2) udregnet arbejdet på den *lille* vandmængde mellem A og B, der er flyttet den *lange* vej mellem B og D (eller A og C). Resultatet bliver imidlertid det samme!
Dette kan iøvrigt også ses ved at den potentielle energi af vandmasserne mellem B og C ikke ændres, den potentielle energi af hele væskesøjlen er kun ændret ved, at den potentielle energi af vandmængden mellem A og B er "erstattet" af den potentielle energi af vandmængden mellem C og D. Tyngdekraftens arbejde kan så ifølge (3.8) beregnes som dette tab i potentiel energi.

5. Mekanisk energi og mekanisk energibevarelse

Mekanisk energi er *ikke* en ny energiform, der indføres. Ved den mekaniske energi forstås simpelthen *summen* af et legemes kinetiske energi og dets potentielle energi. Altså har vi

(5.1) $E_{\text{mek}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$ Mekanisk energi**Fejl! Bogmærke er ikke defineret.**

Følgende øvelse kan forhåbentlig belyse en vigtig egenskab ved den mekaniske energi:

Øvelse 11 Et legeme med massen 5,00 kg bevæger sig i højden 10,0 m med farten 2,00 m/s. Dette legeme antages kun at være påvirket af tyngdekraften (vi ser bort fra en lille luftmodstand).
a) Beregn legemets kinetiske energi og dets potentielle energi, samt den mekaniske energi i denne højde.
b) Brug arbejdssætningen til at beregne legemets kinetiske energi i højden 6,00 m. c) Beregn desuden den potentielle energi i den nye højde.
d) Og derefter skal du beregne den mekaniske energi i den nye højde.
e) Hvad er *tilvæksten* i kinetisk energi under bevægelsen?
f) Hvad er *faldet* i potentiel energi?
Hvad ser du af dine beregninger med hensyn til den mekaniske energi?

Efter denne øvelse vil vi begrunde den i fysikken vigtige sætning, der kaldes *mekanikkens energisætning*.

Vi forestiller os et legeme, der er påvirket af en række forskellige kræfter, herunder eventuelt også gnidningskræfter, der er ikke-konservative. Vi inddeler kræfterne i de konservative feltkræfter og de andre, som her kaldes de *ydre* kræfter. Den resulterende kraft er (vektor-)summen af dem alle:

(5.2) $\boldsymbol{F}_{\text{res}} = \boldsymbol{F}_{\text{kons}} + \boldsymbol{F}_{\text{ydre}}$

Herved bliver den resulterende krafts *arbejde* ligeledes summen af to arbejder:

(5.3) $A_{\text{res}} = A_{\text{kons}} + A_{\text{ydre}}$

Vi udnytter nu arbejdssætningen (2.2) og sætning (3.8) om konservative kræfters arbejde. Af (5.3) finder vi så:

(5.4) $\Delta E_{\text{kin}} = -\Delta E_{\text{pot}} + A_{\text{ydre}}$

Vi omformer ligning (5.4) på følgende måde:

$$\Delta E_{\text{kin}} + \Delta E_{\text{pot}} = A_{\text{ydre}}$$

(5.5) hvoraf

$$\Delta E_{\text{mek}} = A_{\text{ydre}}$$

Denne sidste ligning kaldes *mekanikkens energisætning:*

(5.6) $\Delta E_{\text{mek}} = A_{\text{ydre}}$ Mekanikkens energisætning**Fejl! Bogmærke er ikke defineret.**

Tilvæksten i mekanisk energi skyldes altså udelukkende de ydre kræfters arbejde. Hvis der kun er konservative kræfter tilstede - eller hvis blot de ydre kræfter ikke udfører noget arbejde - har vi **mekanisk energibevarelse**Fejl! Bogmærke er ikke defineret.**:**

(5.7) $E_{\text{mek}} = \text{konstant}$ hvis (og kun hvis) $A_{\text{ydre}} = 0$

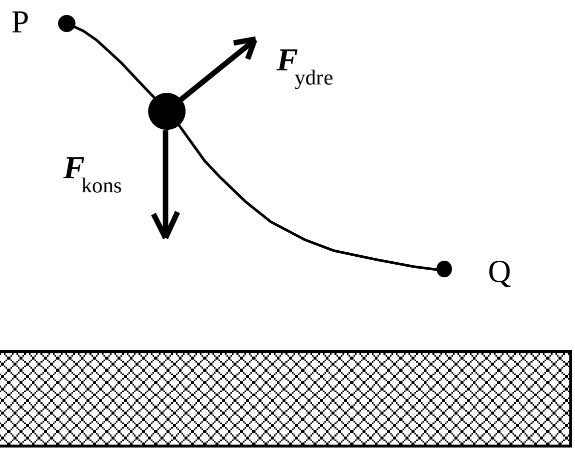


Fig.5 *Hvis de ydre kræfters arbejde er 0, er den mekaniske energi bevaret. Dvs.* $E_{\text{mek}}(\text{P}) = E_{\text{mek}}(\text{Q})$

Når tilvæksten i mekanisk energi er 0, må den mekaniske energi være konstant under bevægelsen, altså have samme værdi i alle punkter, som legemet passerer.

Eksempel Et eksempel på (tilnærmelsesvis) mekanisk energibevarelse har vi i et pendul, f.eks. er svingende lod ophængt i en snor. For at undgå, at loddet drejer omkring sit tyngdepunkt, kan vi ophænge loddet i *to* snore (bi-filar ophængning!). Se fig.6.

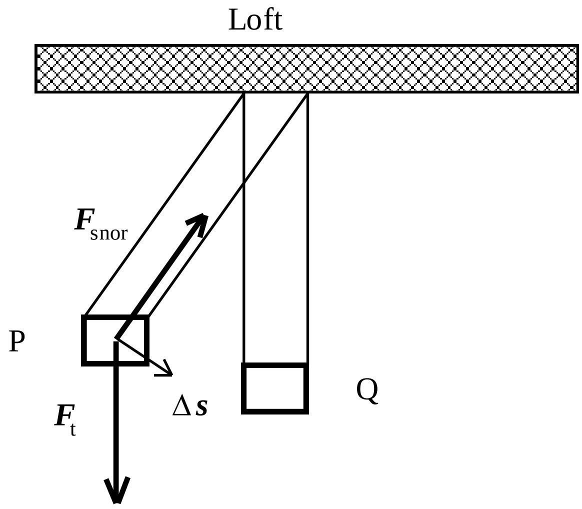


Fig.6
Bifilar ophængning af pendul

Den konservative kraft er tyngdekraften $\boldsymbol{F}_t$, og den *ydre* kraft på loddet er kræfterne fra snorene, som her er tegnet som *en* samlet kraft $\boldsymbol{F}_{snor}$. Snorkraftens arbejde er imidlertid 0, idet snorkraften er vinkelret på bevægelsen, se figur. Derfor vil den mekaniske energi i tyngdefeltet være bevaret (hvis vi ser bort fra luftmodstanden og eventuel gnidning i snorenes ophæng).

(5.8) $$E_{mek}(\mathrm{P}) = E_{mek}(\mathrm{Q})$$

eller

(5.9) $$E_{kin}(\mathrm{P}) + E_{pot}(\mathrm{P}) = E_{kin}(\mathrm{Q}) + E_{pot}(\mathrm{Q})$$

Hvis loddets *fart* i punkt P er 0, og højdeforskellen mellem punkt P og punkt Q kaldes h_{PQ}, giver (5.9):

(5.10) $$m \cdot g \cdot h_{PQ} = \tfrac{1}{2} m v_Q^2 - 0$$

Vi ser, at loddets *tab* i potentiel energi $m \cdot g \cdot h_{PQ}$ opvejes af loddets *tilvækst* i kinetisk energi $\tfrac{1}{2} m v_Q^2$.

Øvelse 12 Et barn har begyndelsesfarten 1,0 m/s, før det begynder at glide ned af en 100% glat vandrutche-bane (ingen gnidningsmodstand!). Højdeforskellen mellem begyndelsespunktet og vandoverfladen er 5,0 m.
Beregn barnets fart lige før mødet med vandet!

Kommentar til mekanikkens energisætning:

Vi har under behandlingen af mekanikkens energisætning kun taget hensyn til *et* legemes bevægelse. Derfor optræder der i formel (5.1) for den mekaniske energi kun *en* bevægelsesenergi.

Dette er kun korrekt, hvis det andet legeme, der er "skyld" i den konservative feltkraft, har en masse, der er uendelig meget større end massen af det legeme, hvis bevægelse, vi studerer. Hvis f.eks. vi betragter bevægelsen af en stålkugle med en masse på f.eks. 10 kg i jordens tyngdefelt, er det helt berettiget at se bort fra, at de indbyrdes kræfter (jævnfør Newtons 3. lov!) mellem kuglen og jorden foruden at påvirke kuglens bevægelse *også* påvirker jordens bevægelse!

Men hvis de to legemer, der påvirker hinanden med konservative kræfter, har masser, der er af omtrent af samme størrelse, må vi tage hensyn til *begge* legemers bevægelse, når vi opskriver formlen for den mekaniske energi:

(5.11) $$E_{\text{mek}} = E_{\text{kin, 1}} + E_{\text{kin, 2}} + E_{\text{pot 1,2}}$$

Den potentielle energi mellem de to legemer vil ofte kun afhænge af den indbyrdes afstand *r* mellem dem, se fig.7.

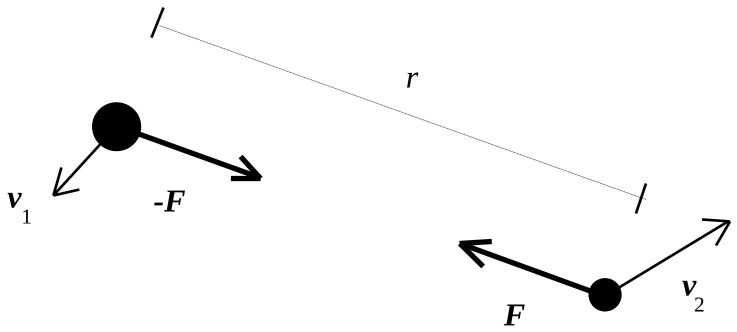


Fig.7

To legemer, der påvirker hinanden med en konservativ feltkraft

Eksempler på systemer, hvor der skal tages hensyn til begge legemers bevægelse, når den mekaniske energi skal udregnes, er *brintatomet*, bestående af en elektron og en proton, der kredser om hinanden, holdt sammen af den gensidige elektriske tiltrækning. Godt nok er protonen ca. 2000 gange tungere end elektronen, med ved nøjagtigere beregninger er det altså også nødvendigt at tage hensyn til protonens bevægelse under indflydelse af elektronen. Et andet eksempel er et *dobbelt-stjernesystem* - to stjerner, der kredser om det fælles tyngdepunkt - holdt sammen af de gensidige tyngdekræfter.

Hvis de ydre kræfters arbejde på disse systemer er 0, er den mekaniske energi (5.11) en bevægelseskonstant - altså en størrelse, der ikke ændrer sig med tiden. Det skal bemærkes, at de såkaldt ydre kræfter omfatter *alle andre kræfter* end den konservative kraft, der virker mellem de to dele af systemet. Disse såkaldt ydre kræfter kan også være *indre gnidningskræfter* mellem dele af systemet!

Formel (5.11) kan let udvides til at omfatte *systemer med flere end to dele*. Den mekaniske energi af et sådant system vil være summen af de kinetiske energier af alle dele af systemet, plus summen af de potentielle energier mellem delene.

Eksempler er atomer med mere end én elektron, solsystemet omfattende Solen og alle planeterne.

Opgaver til arbejde og energi

Opgave 1 En person skubber med kraften 375 N til en fast væg i 5,0 minutter. Beregn denne krafts arbejde.

Opgave 2 En pumpe pumper vand op i et vandtårn. Pumpen skal pumpe vandet 25 m op. Hvilket arbejde skal der udføres på hver kubikmeter vand, der pumpes op?

Opgave 3 En lærredssæk indeholder 1200 g blyhagl. Denne lærredssæk skubbes 50 gange hurtigt efter hinanden ud over en bordkant. Afstanden fra bordkant til gulv er 80 cm. Idet det antages, at hele tabet i potentiel energi omsættes til indre energi i blyhaglene, skal du beregne temperaturstigningen i blyhaglene. Blys varmefylde er $0{,}130\,\mathrm{J/(g\cdot K)}$.

Opgave 4 Ved muskelarbejde omsættes kun ca. 20% af den omsatte energi til arbejde. De resterende 80% omdannes til varmeenergi.
En person med massen 70 kg bestiger en trappe med højden 30 m.
a) Beregn størrelsen af den energi, som denne person må omsætte under bestigningen.
Opstigningen varer 1,5 minut.
b) Beregn gennemsnitseffekten, som personen udvikler.

Opgave 5 En bold har farten 100 km/h. Boldens masse er 82,7 g. Beregn boldens kinetiske energi.

Opgave 6 En geværkugle med massen 20,0 g skydes gennem en 5,00 cm tyk mur. Kuglens fart er 500 m/s før den rammer muren. Efter passagen af muren er farten 300 m/s.
a) Beregn det arbejde, som muren har udført på kuglen.
b) Beregn desuden gennemsnitskraften på kuglen.
c) Beregn endelig kuglens acceleration.

Opgave 7 Curling er en sportsgren, hvor spillerne lader glatslebne granitsten glide på en vandret isbane. Disse sten har alle massen 19,96 kg.
Gnidningskoefficienten mellem sten og is er for en bestemt isbane 0,023. På denne
bane sendes en sten afsted med farten 3,6 m/s.
a) Beregn størrelsen af gnidningskraften.
b) Brug herefter arbejdssætningen til at beregne, hvor langt stenen vil bevæge sig, før den er stoppet.

Opgave 8 En bil med massen 1200 kg bremser på en vandret vej, således at farten reduceres fra 60 km/h til 0 over en strækning på 12 m. Idet bremsekraften antages at være konstant, skal du beregne størrelsen af denne.

Opgave 9 Et fly med massen 100 ton flyver med farten 900 km/h i højden 7,00 km over jordoverfladen. Nulpunktet for potentiel energi vælges 10,0 km over jordoverfladen. Beregn flyets mekaniske energi.

Opgave 10 En elevator løfter med nogenlunde konstant fart 5 personer 15 m op på tiden 30 s. Personernes gennemsnitsmasse er 70 kg og elevatorens masse er 800 kg. Beregn den effekt, som elevatorens motor må levere.

Opgave 11 Ved Trollhätten vandfaldene er den samlede faldhøjde 33 m, og den mindste vandmængde er 300 m^3/s. Med denne vandgennemstrømning produceres elektrisk effekt på 80 MW.

a) Hvor mange procent af faldenes effekt udnyttes?

Den største vandgennemstrømning er 900 m^3/s, men heraf udnyttes kun 550 m^3/s ved en nyttevirkning på 80%.

b) Hvad er værkets elektriske maksimaleffekt?
c) Hvor mange procent af faldenes effekt udnyttes i dette tilfælde?

Opgave 12 Barsebäck atomkraftværket har to reaktorer. Hver reaktor udvikler ved maksimal belastning en termisk effekt på 3,0 GW. Af denne effekt omsættes ca. 1/3 til elektrisk effekt. Resten af effekten sendes ud i Øresund, der udnyttes som kølevand. Kølevandsindtaget er 50 m^3/s ved maksimal belastning.

a) Beregn værkets maksimale elektriske effekt.
b) Beregn temperaturstigningen i kølevandet.

Stikordsregister

Formler i kræfter, arbejde og energi

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$$

Kræfter lægges sammen som vektorer ("kræfternes parallogram")

$$\boldsymbol{F}_{\text{res}} = m \cdot \boldsymbol{a}$$ **Newtons 2. lov**

Den resulterende kraft er lig med massen gange accelerationen. Den resulterende kraft findes som (vektor-)summen af de enkeltkræfter, der virker på legemet.

$$\boldsymbol{a} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

*Acceleration **a** er hastighedstilvækst pr. tidsenhed*

$$\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2$$ **Newtons 3. lov**

Når et legeme påvirker et andet med kraften $\boldsymbol{F}_2$*, vil det andet legeme påvirke det første med en lige så stor, men modsat rettet kraft* $\boldsymbol{F}_1$.

$$|\boldsymbol{F}_{\text{t}}| = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$ **Newtons gravitationslov**

Størrelsen af tyngde-kraften mellem to legemer er lig med produktet af de to legemers masse, delt med kvadratet på afstanden mellem de to legemer, og ganget med gravitationskonstanten. Kraften er tiltrækkende og rettet langs forbindelseslinien mellem de to legemer.

$$\boldsymbol{F}_{\text{t}} = m \cdot \boldsymbol{g}$$ **Tyngdekraft på et legeme**

*Tyngdekraften på et legeme med massen m er lig med massen m ganget med tyngdeaccelerationen **g**.*

$$|\boldsymbol{F}_{\text{el}}| = k_{\text{C}} \cdot \frac{|Q \cdot q|}{r^2}$$ **Coulombs lov**

Størrelsen af kraften mellem to elektriske ladninger er lig med produktet af de to elektriske ladninger, delt med kvadratet på afstanden mellem de to elektriske ladninger, ganget med Coulomb-konstanten. Kraften er rettet langs forbindelseslinien af de to ladninger.

$$|\boldsymbol{F}_{\text{dyn}}| = \mu_{\text{dyn}} \cdot |\boldsymbol{F}_{\text{N}}|$$ **Coulombs gnidningslov**

Størrelsen af den gnidningskraften er lig med gnidningskoefficienten, ganget med størrelsen af normalkraften.

$A = |\boldsymbol{F}| \cdot |\Delta \boldsymbol{s}| \cdot \cos(\alpha)$ **En krafts arbejde**

En krafts arbejde er lig med kraftens størrelse, ganget med længden af forskydningsvektoren, og ganget med cosinus til vinklen mellem kraften og forskydningsvektoren.

$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ **Et legemes bevægelsesenergi**

Et legemes bevægelsesenergi er lig med massen af legemet, ganget med kvadratet på legemets fart, ganget med 0,5.

$\Delta E_{\text{kin}} = A_{\text{res}}$ **Arbejdssætningen**

Tilvæksten i et legemes bevægelsesenergi er lig med den resulterende krafts arbejde.

$E_{\text{pot}}(\text{P}) = A_{\text{t}}(\text{P} \rightarrow \text{O})$ **Definition af potentiel energi**

Den potentielle energi i et punkt P er den konservative krafts arbejde, når legemet flyttes fra punktet P til det valgte nulpunkt for potentiel energi O.

$E_{\text{pot}}(\text{P}) = m \cdot g \cdot h_{\text{P}}$ **Potentiel energi i tyngdefelt**

Den potentielle energi i et punkt P i tyngdefeltet er lig med masse, ganget med størrelsen af tyngdeaccelerationen, og endelig ganget med punktets højde over det valgte nulniveau.

$A_{\text{t}} = -\Delta E_{\text{pot}}$ **feltets arbejde = tabet i potentiel energi**

Den konservative krafts arbejde er lig med minus tilvæksten i potentiel energi.

$E_{\text{mek}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$ **Mekanisk energi**

Den mekaniske energi er lig med summen af den kinetiske energi og den potentielle energi.

$\Delta E_{\text{mek}} = A_{\text{ydre}}$ **Mekanikkens energisætning**

Tilvæksten i den mekaniske energi for et legeme er lig med de ydre kræfters arbejde på legemet.

Konstanter:

$G = 6{,}6726 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$ **Gravitations-konstanten**

$g = 9{,}82\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ **Tyngdeaccelerationen i Danmark**

$k_{\text{C}} = 8{,}99 \cdot 10^9\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$ **Coulombkonstanten**