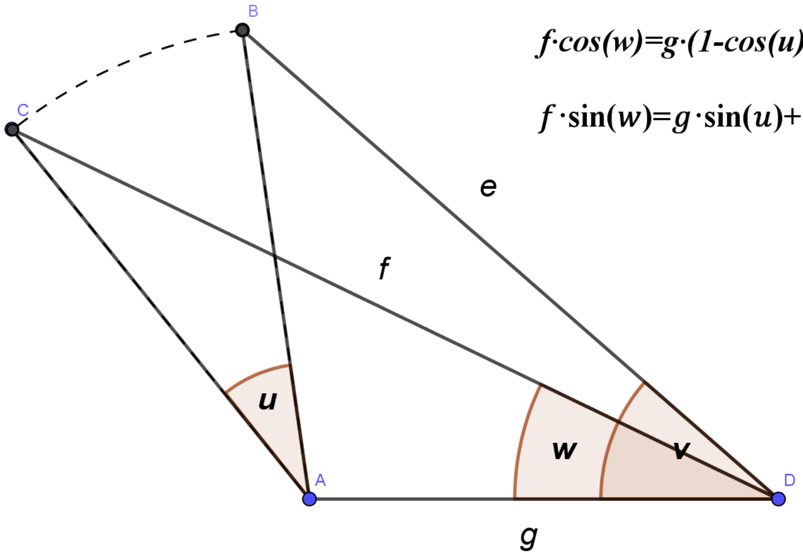
Opgaven er: bevis de to formler på figuren nedenfor



$f \cdot cos(w) = g \cdot (1 - cos(u)) + e \cdot cos(v - u)$

$f \cdot \sin(w) = g \cdot \sin(u) + e \cdot \sin(v - u)$

Bevis: vektoren $\overrightarrow{AB}$ drejes over i vektoren $\overrightarrow{AC}$ ved hjælp af matricen $R(u) = \begin{pmatrix} \cos(u) & -\sin(u) \\ \sin(u) & \cos(u) \end{pmatrix}$.

(1) $\overrightarrow{AC} = R(u) \cdot \overrightarrow{AB}$

Vi omformer sådan: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}$ og $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}$ og får

$$\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} = R(u) \cdot (\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}) \text{ eller}$$

(2) $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + R(u) \cdot (\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA})$

Så mangler vi blot at sætte koordinater på (NB: vinklerne v, w ligger 'forkert' i forhold til 1.akse – derfor minus foran fx $\cos(v)$, idet $\cos(180° - v) = -\cos(v)$ når det gælder vektorkoordinater:

$\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} -e \cdot \cos(v) \\ e \cdot \sin(v) \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} -g \\ 0 \end{pmatrix}$ hvoraf $\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} -e \cdot \cos(v) + g \\ e \cdot \sin(v) \end{pmatrix}$

Vi udregner så $R(u) \cdot (\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}) = \begin{pmatrix} \cos(u) & -\sin(u) \\ \sin(u) & \cos(u) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -e \cdot \cos(v) + g \\ e \cdot \sin(v) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} (-e \cdot \cos(v) + g) \cdot \cos(u) - e \cdot \sin(v)\sin(u) \\ (-e \cdot \cos(v) + g) \cdot \sin(u) + e \cdot \sin(v) \cdot \cos(u) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} g \cdot \cos(u) - e \cdot (\cos(v) \cdot \cos(u) + \sin(v)\sin(u)) \\ g \cdot \sin(u) - e \cdot (\cos(v) \cdot \sin(u) - \sin(v) \cdot \cos(\mathrm{u})) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} g \cdot \cos(u) - e \cdot \cos(v - u) \\ g \cdot \sin(u) + e \cdot \sin(v - u) \end{pmatrix}$$

Her har vi benyttet de trigonometriske formler $\cos(v-u) = \cos(v) \cdot \cos(u) + \sin(v)\sin(u)$ og

$\sin(v-u) = \sin(v) \cdot \cos(u) - \cos(v) \cdot \sin(u)$

V får videre: $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + R \cdot \left(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}\right) = \begin{pmatrix} -g \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g \cdot \cos(u) - e \cdot \cos(v-u) \\ g \cdot \sin(u) + e \cdot \sin(v-u) \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC}$'s koordinater er $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -f \cdot \cos(w) \\ f \cdot \sin(w) \end{pmatrix}$, jf. kommentar tidligere

Altså
$$-f \cdot \cos(w) = -g \cdot (1 - \cos(u)) - e \cdot \cos(v-u)$$
$$f \cdot \sin(w) = g \cdot \sin(u) + e \cdot \sin(v-u)$$

Og dermed
$$f \cdot \cos(w) = g \cdot (1 - \cos(u)) + e \cdot \cos(v-u)$$
$$f \cdot \sin(w) = g \cdot \sin(u) + e \cdot \sin(v-u)$$

Voila