

Opgaver til vækstmodeller – eksponentiel vækst og radioaktive henfald

- fra borgeleo.dk

Opgave 1 – eksponentiel vækst

I en befolkning bestående af 10 mio. individer er (øjeblikks-)fødselsraten 0,035/år, og (øjeblikks-)dødsraten er 0,020/år.

Besvar under disse forudsætninger følgende:

- a) Hvad er fordoblingstiden for befolkningen?
- b) Hvad ville fordoblingstiden være hvis ingen døde?
- c) Hvad ville halveringstiden være hvis der ingen fødsler var?

- d) Beregn befolkningens størrelse 50 år senere under de tre betingelser i spørgsmål a, b og c. Tegn de tre grafer i samme koordinatsystem i perioden 0 – 50 år.

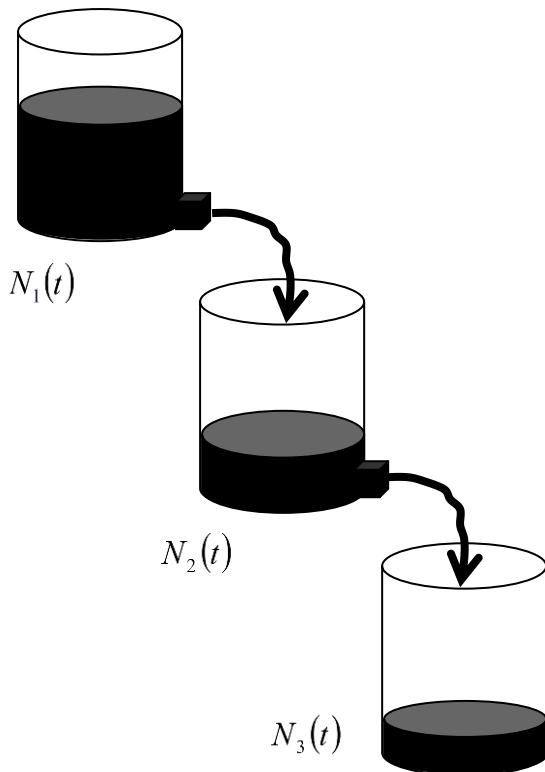
- e) Opskriv forskrifter for befolkningens størrelse i spørgsmål a) på formerne
 - 1) $N(t) = N_0 \cdot e^{k \cdot t}$
 - 2) $N(t) = N_0 \cdot 2^{\frac{t}{T_2}}$
 - 3) $N(t) = N_0 \cdot a^t$

Opgave 2 - radioaktive henfaldsserier

- der forudsættes kendskab til strålingsaktivitetens sammenhæng med antallet af radioaktive kerner

Radioaktive henfald sker ofte i serier – dvs. et radioaktivt henfald efterfølges af et andet, der igen..., indtil henfaldet fører til en stabil atomkerne.

Dette er illustreret i modellen nedenfor.



- a) Begrund de tre vækstligninger

$$\frac{dN_1}{dt} = -k_1 \cdot N_1$$

$$\frac{dN_2}{dt} = -k_2 \cdot N_2 + k_1 \cdot N_1$$

$$\frac{dN_3}{dt} = k_2 \cdot N_2$$

Her er k_1 og k_2 henfaldskonstanterne for atomkernerne med numrene 1 og 2. Atomkerner med nummeret 3 antages stabile.

- b) Hvis vi antog, at der var 3 på hinanden følgende henfald, hvordan ville så vækstligningen for kerne 3 og 4 se ud?

Hvis du har arbejdet med løsning af differentialligninger, kan du forsøge at besvare følgende spørgsmål, idet vi forudsætter, at begyndelses-antallene for de tre arter kerner er hhv. N_{10} , N_{20} og N_{30} i modellen fra figuren ovenfor:

- c) Opskriv løsningsfunktionerne $N_1(t)$ og $N_2(t)$
- d) Opskriv løsningsfunktionen $N_3(t)$, idet du først overvejer, hvad der gælder om summen $N_1(t) + N_2(t) + N_3(t)$. Begrund gerne denne overvejelse ved hjælp af vækstligningerne ovenfor.
- e) Hvad gælder der om grænseværdierne for t gående mod uendelig for de tre kerneantal? Kan du også begrunde dette fra dine løsningsfunktioner fra c) og d) spørgsmålene?

Opgave 3 – ligevægt mellem henfald i henfaldsserie

Vi betragter igen modellen fra opgave 2.

Vi antager, at atomkernerne med nummeret 1 har en meget lang halveringstid, således at *henfaldsaktiviteten fra denne kan betragtes som konstant* over mange år. Antallet af atomkerner med nummeret 2 vil derfor i begyndelsen vokse, men efterhånden vil denne vækst blive langsommere. (Vi antager i det følgende, at halveringstiden for atomkernerne med nummeret 2 er meget kortere end for atomkernerne med nummeret 1)

- Begrund, at *væksten* i antallet af atomkerner med nummeret 2 vil aftage selvom tilførslen pr. tidsenhed er konstant.
- Begrund, at der efterhånden vil indstille sig en ligevægt, således at antallet af nydannede atomkerner med nummeret 2 er lige så stort som antallet, der henfalder – og der derfor vil være et konstant antal atomkerner med nummeret 2.
- Hvad er i denne ligevægtssituation forholdet mellem N_2 og N_1 , udtrykt ved halveringstiderne for de to isotoper?
- Hvad kan man i ligevægtssituationen sige om strålingsaktiviteten fra atomkerne med nummeret 1 sammenlignet med strålingsaktiviteten fra atomkerne med nummeret 2?
- Vi ser igen på ligevægtssituationen som betragtet ovenfor. Hvordan vokser antallet af atomkerner med nummeret 3 med tiden?

Opgave 4 – ligevægt i uranfamilien

Uran-238 har halveringstiden $4,47 \cdot 10^9$ år, og henfalder til Th-234 med halveringstiden 24,1 døgn. Denne henfalder igen til en række ustabile atomkerner med halveringstider, der også er meget kortere end urans. Til slut dannes den stabile isotop Pb-206. Denne henfalds-familie kaldes uranfamilien.

Vi betragter igen ligevægts-situationen fra opgave 3.
(Jorden er så gammel, at denne ligevægtssituation for længst er opnået!)

Vi antager, at vi er i besiddelse af $6,02 \cdot 10^{26}$ uran-238-atomer.

- Beregn strålingsaktiviteten fra uran-atomkernerne (i enheden Bq!).
Benyt, at $1 \text{ år} = 3,1558 \cdot 10^7 \text{ s}$.
- Hvad er i ligevægtssituationen antallet af Th-234-atomer?
- Hvad bliver strålings-aktiviteten fra Th-234 atomerne?
- Hvor mange Pb-206-atomer dannes i hvert sekund?