

# Partikelbevægelse i stærkt tyngdefelt

BEVÆGELSESLIGNINGER OG NUMERISKE LØSNINGER.

af **Borge L. Nielsen**

Nature and Nature's Laws  
lay hid in Night  
God said, "Let Newton be",  
and all was light.

Alexander Pope.

It did not last:  
the Devil howling  
"Ho, let Einstein be",  
restored the status quo.

J.C.Squire.

Den generelle relativitetsteori har vist sig at give rigtige forudsigelser og forklaringer på stadig flere eksperimenter og målinger, bl.a. målinger på binære systemer uden for solsystemet. Det har endog været muligt at finde kandidater til denne teoris vel nok mærkeligste forudsigelse: de sorte huller, områder af rummet, hvor tyngdefeltet forhindrer selv lys i at undslippe.

I det følgende vil vi se nærmere på tyngdefeltet omkring et ikke roterende sort hul.

Dette tyngdefelt er mindre specielt, end det måske umiddelbart kunne forekomme. Tyngdefeltet uden for alle sfærisk symmetriske masser har nemlig præcis samme form.

Vedrørende dannelse af sorte huller, se f.eks. Bjørn Felsa-gers artikel i Gamma nr. 48.

Bevægelsesligningerne for partikler, der falder frit i dette felt, er ikke lette at løse eksakt. Men numerisk er der ikke de store problemer. Og så har fysiklæreren bl.a. opnået at få endnu en anvendelse af regnemaskinen, hvilket jo er i tidens ånd!

Det er naturligvis ikke muligt at undgå en del matematik, når bevægelsesligningerne udledes. Den sværeste del er henvist til appendiks, som nok skal overspringes ved en (evt.) første gennemlæsning!

Merkurs periheldrejning og afbøjning af lys i solens tyngdefelt er to eksempler på fænomener, der er eksperimentelt verificerede, og som kan forklares udfra Einsteins gravitationsfeltteori.

Disse effekter er dog begge så små, at de fuldt ud kan redegøres for ved approksimationer til bevægelsesligningerne, hvor et svagt tyngdefelt forudsættes.

Er vi imidlertid tæt på et sort hul, er tyngdefeltet på ingen måde svagt, og vi må anvende bevægelsesligningerne uden approksimationer.

Som det vil fremgå af de numeriske løsninger senere i denne artikel, optræder periheldrejning og lysafbøjning i særlig udtalt form i tyngdefeltet omkring et sort hul, sammen med en del andre i Newtons gravitationsteori ukendte fænomener.

Newtons gravitationsteori er matematisk set meget enkel, og bevægelsesligningerne er ganske lette at løse numerisk, f.eks kan tiden bruges som baneparameter.

Men desværre er disse ligninger ikke rigtige i et stærkt tyngdefelt!

For at finde frem til bevægelsesligningerne for frit fald i et stærkt tyngdefelt, må vi gå ud fra den såkaldte Schwarzschildmetrik, som i polære koordinater lyder (se evt. ref.1 p.180):

$$c^2 d\tau^2 = c^2 B(r) dt^2 - A(r) dr^2 - r^2 d\phi^2 \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

hvor

$$B(r) = \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right) \quad \text{og} \quad A(r) = B(r)^{-1}$$

Ved parametriseringen af rummet benyttes altså de tre størrelser  $(r, \theta, \phi)$ . Vinklerne  $\theta$  og  $\phi$  er de sædvanlige til fastlæggelse af en retning i rummet, betydningen af  $r$  er den, at en cirkel med centrum i  $r = 0$  har omkredsen  $2\pi r$ .

$M$  er massen af det sorte hul,  $c$  er lyshastigheden,  $G$  er gravitationskonstanten.

Da vi har sat  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , har vi begrænset de mulige bevægelser til denne plan. Men p.g.a. rotationssymmetrien vil enhver bevægelse foregå i en sådan plan, så vi har ikke med denne begrænsning mistet løsninger.

Vi vil i stedet for koordinaterne  $(r, \phi)$  indføre koordinaterne  $(x, y)$ , hvor

$$(x, y) = (r \cdot \cos \phi, r \cdot \sin \phi)$$

og metrikken får nu følgende form (regn selv efter):

$$(1) \quad c^2 d\tau^2 = c^2 B(r) dt^2 - (A(r) - 1) r^{-2} (\vec{r} \cdot d\vec{r})^2 - d\vec{r}^2$$

hvor

$$\vec{r} \cdot d\vec{r} = x \cdot dx + y \cdot dy \quad \text{og} \quad d\vec{r}^2 = dx^2 + dy^2$$

I (1) er  $d\tau$  egentidsintervallet mellem de to begivenheder  $(t, \vec{r})$  og  $(t+dt, \vec{r}+d\vec{r})$ . Tiden  $t$  kan fortolkes som egentiden for en fjern iagttager.

Partiklen, i hvis bevægelse vi er interesserede, er til tiden  $t$  i punktet  $(x, y)$ , og  $\vec{r} = (x, y)$ , se fig. 1

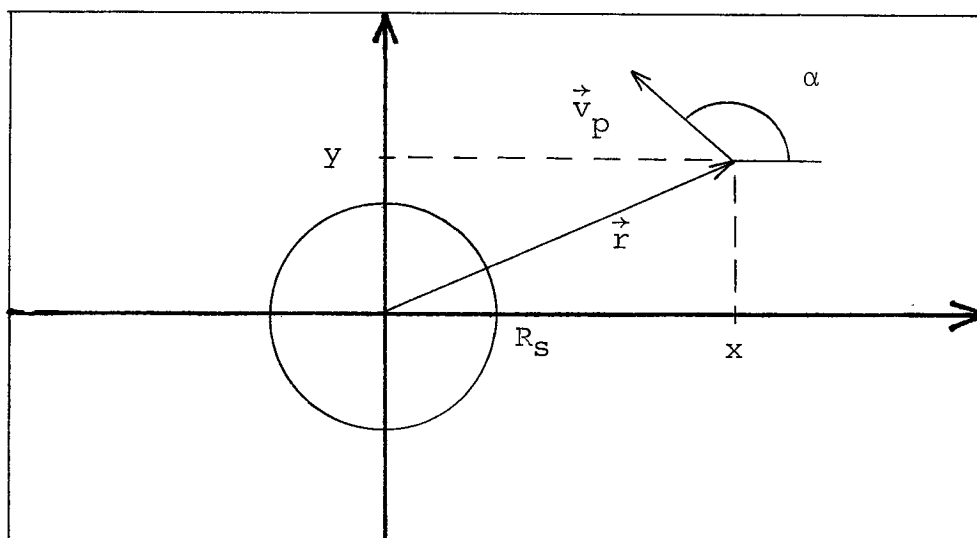


Fig. 1

Massen  $M$  af det sorte hul er placeret i  $(0, 0)$ . Koordinathastigheden  $\vec{v}_p = (dx/dp, dy/dp)$  og valg af baneparameter  $p$  vil blive omtalt nedenfor.

Radius i den på fig. 1 indtegnede cirkel er den såkaldte Schwarzschildradius,  $R_s = 2MG/c^2$ .

Hvis vi måler  $x$  og  $y$  (og  $r$ ) i enheder af  $R_s$  og  $\tau$  og  $t$  i enheden  $R_s/c$ , får vi følgende udtryk for metrikken (1):

$$(1a) \quad d\tau^2 = B(r)dt^2 - (A(r)-1)r^{-2}(\vec{r} \cdot d\vec{r})^2 - d\vec{r}^2$$

$$B(r) = \left(1 - \frac{1}{r}\right), \quad A(r) = B(r)^{-1}$$

Her er alle størrelser altså dimensionsløse!  
Kvadratet på en lille vejstrækning  $ds$  er ifølge (1a) givet ved

$$(2) \quad ds^2 = (A(r)-1)r^{-2}(\vec{r} \cdot d\vec{r})^2 + d\vec{r}^2$$

For store  $r$ -værdier (eller  $\vec{r} \perp d\vec{r}$ ) er første led forsvindende, og  $ds^2 = d\vec{r}^2$ , men de er i almindelighed ikke identiske. Således er  $r$  ikke afstanden til  $(0,0)$ . Længden af en given banekurve må findes ved at integrere  $ds$  langs banen.

Vedrørende valg af baneparameter følgende:

Det ville være nærliggende at benytte egentiden  $\tau$  som parameter. Men det har den ulempe, at det så ikke er muligt at beregne banekurver for fotoner, idet jo  $d\tau = 0$  for disse.

Vi vælger derfor en parameter  $p$ , der er proportional med egentiden  $\tau$  for hastigheder mindre end lyshastigheden, men som ikke bliver 0 ved lyshastigheden.

En hjælp ved valget af en sådan parameter  $p$  får vi ved at bemærke, at størrelsen

$$H = B(r) \frac{dt}{d\tau}$$

kan vises at være en bevægelseskonstant, lig med partiklens energi inklusiv hvilemasseenergien, dog her pr. hvilemasse-enhed!

Hvis vi vælger

$$(3) \quad dp = B(r)dt$$

vil  $dp/d\tau = H = \text{konstant}$ . Altså en lineær sammenhæng mellem  $p$  og  $\tau$ . For fotoner er  $H$  ikke defineret, da  $d\tau = 0$ , men  $dp$  er ikke 0 i en fotonbane, og  $p$  kan derfor bruges som parameter.

Vi vil senere indføre bevægelseskonstanten  $e = H^{-2}$ , som har den fordel fremfor  $H$ , at den ikke divergerer for fotoner.

Det er nu muligt udfra (1a) og (3) at udlede bevægelsesligningerne for frit fald, hvor  $p$  bruges som parameter. Se appendiks.

Resultatet er :

$$(4) \quad \frac{d^2 \vec{r}}{dp^2} = - \frac{\vec{r}}{2r^3} \cdot \frac{1}{(1-r^{-1})} \cdot \left(1 + 2 \left(\frac{d\vec{r}}{dp}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{r}\right) - \frac{(3r-2)}{r^3} (\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dp})^2\right)$$

Accelerationen er altså rettet mod  $(0,0)$ , og er desuden hastighedsafhængig.

For små hastigheder og store  $r$ -værdier får vi:

$$(5) \quad \frac{d^2 \vec{r}}{dp^2} = - \frac{\vec{r}}{2r^3}$$

hvilket jo er Newtons gravitationslov, da  $dp = dt$  for store  $r$ -værdier, se (3).

Koordinathastigheden  $\vec{v}_p$  er ikke fysisk set en specielt oplysende størrelse. Mere interessant ville det være at måle denne størrelse i forhold til lysets koordinat-hastighed  $\vec{c}_p$ . Dette forhold er nemlig uafhængig af parameteren  $p$ .

Med det for øje finder vi først (kvadrateret på) den tilbagelagte vejstrækning pr.  $p$ -enhed ved at dividere (2) igennem med  $dp^2$  :

$$(6) \quad \left(\frac{ds}{dp}\right)^2 = (A(r)-1)r^{-2} (\vec{r} \cdot \vec{v}_p)^2 + \vec{v}_p^2$$

hvor  $\vec{v}_p = (dx/dp, dy/dp)$ .

Dernæst ser vi på en foton, der på samme position bevæger sig i samme retning.

For en foton gælder  $d\tau^2 = 0$ , og vi får så fra (1a) og (3) ved division med  $dp^2$  :

$$(7) \quad \left(\frac{ds}{dp}\right)^2 = (A(r)-1)r^{-2} (\vec{r} \cdot \vec{c}_p)^2 + \vec{c}_p^2 = \frac{1}{B(r)}$$

Nu kan vi så finde farten målt i enheder af lyshastigheden (i det følgende kaldet  $\beta$ ) ved at dividere (6) med (7) :

$$\beta^2 = \left( (A(r)-1)r^{-2} (\vec{r} \cdot \vec{v}_p)^2 + \vec{v}_p^2 \right) B(r)$$

eller skrevet lidt enklere (  $(A(r)-1)B(r) = 1/r$  ) :

$$(8) \quad \beta^2 = r^{-3} (\vec{r} \cdot \vec{v}_p)^2 + \vec{v}_p^2 \left(1 - \frac{1}{r}\right)$$

Ved den numeriske løsning af (4) får vi brug for begyndelsesværdier for  $\vec{r} = (x, y)$  og  $\vec{v}_p = (dx/dp, dy/dp)$ .

Hvilke værdier skal vi tildele  $dx/dp$  og  $dy/dp$  ?

Vi ønsker at kunne benytte hastigheds-retningen givet ved vinklen  $\alpha$  (se fig.1) og farten (målt i enheder af lyshastigheden)  $\beta$  som begyndelsesværdier for hastigheden.

Først bestemmes lysets koordinathastighed i punktet  $(x, y)$  med retningen  $(\cos\alpha, \sin\alpha)$  :

$$(9) \quad \vec{c}_p = k(\cos\alpha, \sin\alpha)$$

Konstanten  $k$  fastlægges ved at indsætte (9) i (8) og sætte  $\beta = 1$  :

$$(10) \quad 1 = k^2(r^{-3}(x \cos\alpha + y \sin\alpha))^2 + (1 - \frac{1}{r})$$

Nu er koordinathastigheden  $\vec{c}_p$  bestemt. Dermed er også  $\vec{v}_p$  bestemt:

$$(11) \quad \vec{v}_p = \beta \cdot k(\cos\alpha, \sin\alpha)$$

Da vi nu har klaret begyndelses-værdi-problemet, er det en smal sag at løse bevægelsesligningerne (4) numerisk ved anvendelse af en passende numerisk metode.

Som kontrol af beregningerne kan vi udregne to bevægelseskonstanter  $j$  og  $e$  (se ref. 1 p.186) i de beregnede banepunkter:

$$(12) \quad j = x \frac{dy}{dp} - y \frac{dx}{dp}$$

$$(13) \quad e = \frac{1}{B(r)} (1 - r^{-2}(\vec{r} \cdot \vec{v}_p)^2) - \frac{j^2}{r^2} = \frac{1}{B(r)} (1 - \beta^2)$$

Her er  $j$  impulsmomentet (pr. masseenhed),  $e$  modsvarer den mekaniske energi (pr. masseenhed)  $E_{mek}$  i Newtons teori, således at  $e = 1 - 2E_{mek}$  for små hastigheder og store  $r$ -værdier.

En væsentlig årsag til valget af  $p$  som tidsparameter er som tidligere omtalt, at  $dp$  er proportional med egentiden  $d\tau$  for den frit faldende partikel, og vi har følgende sammenhæng (se bemærkningerne til (3)):

$$(14) \quad d\tau = \sqrt{e} \cdot dp$$

Som første eksempel på en numerisk løsning af (4) vises nedenfor fig. 2.

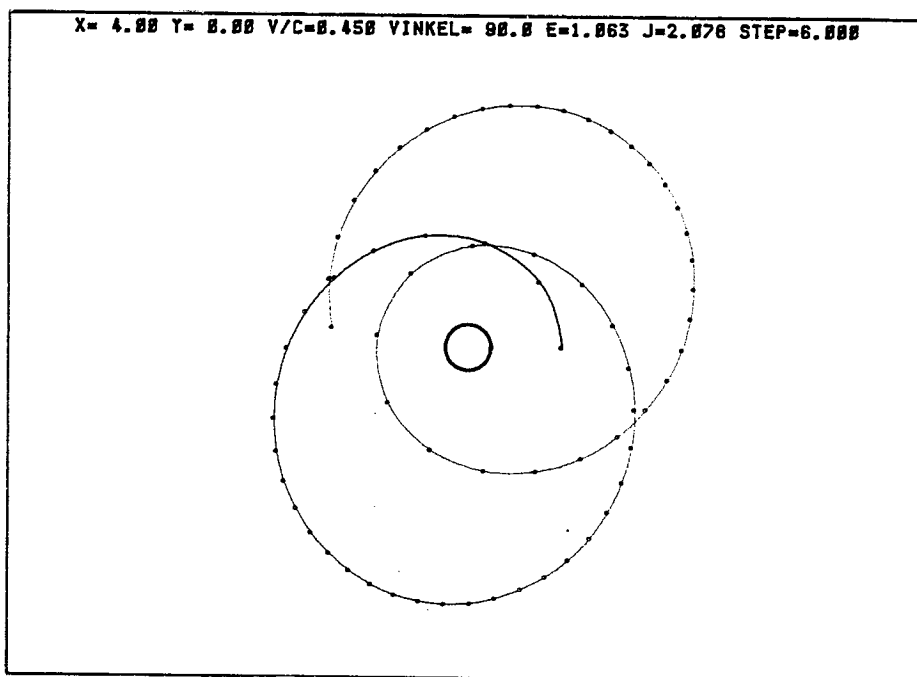


Fig.2

Den lille cirkels centrum er  $(x,y)=(0,0)$ . Cirkelns diameter er 2 Schwarzschild-radier, jvf. fig.1. Startpositionen er  $(x,y)=(4,0)$  og begyndelsesfarten er  $\beta = 0,45$ , vinkelret på "x-aksen".

Bevægelseskonstanterne  $e$  og  $j$  er også at finde på figuren. Størrelsen  $\text{step}$  er tilvæksten i parameterværdi mellem markerede banepunkter, altså  $\Delta p = 6$ . Det bemærkes, at den ved løsning af differentiaalligningerne anvendte steplængde er væsentlig mindre.

I tabel 1 nedenfor ses udskrevet information om de første 11 banepunkter på fig.2.  $\beta = v/c$  er udregnet efter (8),  $j$  og  $e$  efter hhv. (12) og (13).

Egentidsintervallet mellem to på hinanden følgende banepunkter kan beregnes efter (14):  $\Delta\tau = \sqrt{e} \cdot \Delta p = \sqrt{1,063} \cdot 6 = 6,187$ . Enheden er som tidligere omtalt  $2MG/c^3$ .

Fig.2 viser en banekurve med en betydelig periheldrejning!

nr	x	y	r	v/c	e	j
1	4.0000	0.0000	4.000000	0.45000000	1.0633333333	2.0784609691
2	3.0147	2.8625	4.157183	0.43868992	1.0633333326	2.0784609690
3	0.6917	4.5334	4.585818	0.41053742	1.0633333319	2.0784609679
4	-1.9001	4.8299	5.190202	0.37621788	1.0633333317	2.0784609673
5	-4.1509	4.1612	5.877609	0.34289830	1.0633333314	2.0784609664
6	-5.8864	2.9487	6.583674	0.31333257	1.0633333309	2.0784609643
7	-7.1195	1.4734	7.270384	0.28796204	1.0633333308	2.0784609633
8	-7.9164	-0.0979	7.916981	0.26641533	1.0633333308	2.0784609628
9	-8.3477	-1.6679	8.512674	0.24815008	1.0633333307	2.0784609625
10	-8.4755	-3.1792	9.052162	0.23266714	1.0633333307	2.0784609609
11	-8.3513	-4.5974	9.533119	0.21956239	1.0633333306	2.0784609600

Tabel 1

Figurerne 3 - 5 viser alle afbøjning af fotoner. Forskellen i begyndelsesbetingelser er kun ganske små ændringer i y-kordinaten (og dermed impulsmoment j).

Fotonen på fig.3 går ind i en jævn cirkelbevægelse omkring det sorte hul, med  $r = 1,5!$

Er "stødparameteren" y blot lidt større end på fig.3, vil der blot blive tale om en kraftig afbøjning af fotonens bevægelsesretning - den undslipper igen. Fig.4.

Men er y lidt mindre end på fig.3, vil fotonen passere  $r = 1$  og vil spiralere lige ind til  $r = 0!$  Det sorte hul har indfanget fotonen. Fig.5 viser ikke hele forløbet til  $r = 0$  pga. problemer med regnenøjagtigheden.

Vi konstaterer, at det sorte hul har et tværsnit for indfangning af fotoner. Grænse-stødparameteren fjernt fra det sorte hul kan vises at være  $3\sqrt{3}/2$  (j får samme værdi, da  $c_p = 1$  for uendeligt store r. Se nedenfor for beregning af j for cirkelbanen med  $r = 1,5$ ). Således bliver tværsnittet for fotonindfangning:

$$(15) \quad \sigma(\text{foton-indfangning}) = \pi \cdot y^2 = \pi \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \pi \cdot \frac{27}{4}$$

Enheden er (naturligvis!)  $R_s^2 = (2MG/c^2)^2$ .

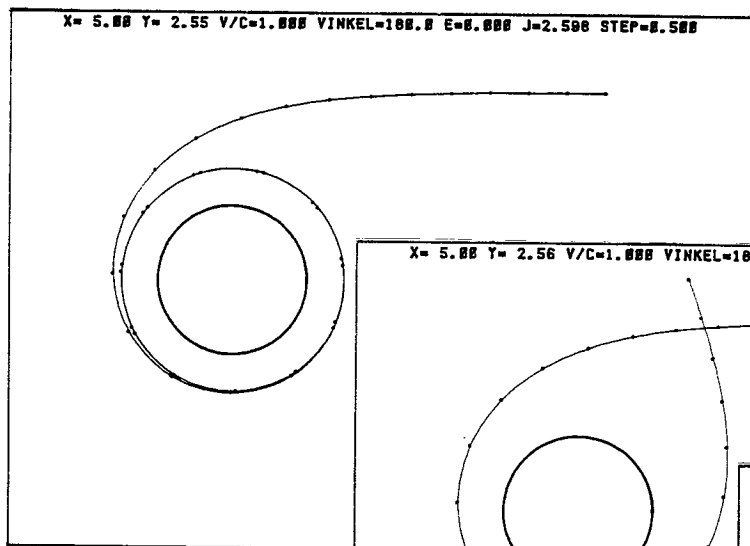


fig.3

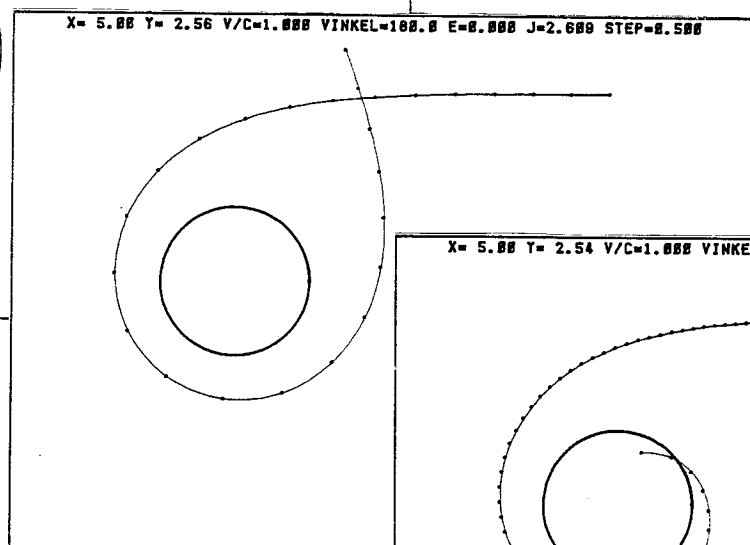


fig.4

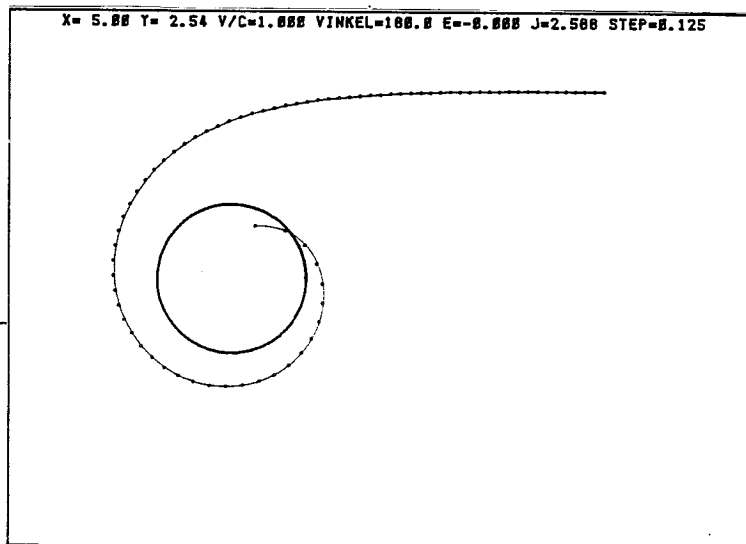


fig.5



Vi vil herefter se på frit fald med begyndeshastigheden 0. Hastigheden vil da naturligtvis være rettet mod (0,0), og bevægelsesligningerne (4) kan simplificeres til

$$(4a) \quad \frac{d^2 r}{dp^2} = - \frac{1}{2r^2(1-1/r)} \left(1 - \left(\frac{dr}{dp}\right)^2\right)$$

Denne ligning kan løses eksakt, idet funktionen  $p(r)$  kan opskrives.

Først multipliceres (4a) med  $2\frac{dr}{dp}$ , og vi får

$$\frac{d}{dp} \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 = - \frac{1}{r^2(1-1/r)} \left(1 - \left(\frac{dr}{dp}\right)^2\right) \frac{dr}{dp}$$

Af ligning (8) ser vi, at  $\beta = \left|\frac{dr}{dp}\right|$ , og den foregåendeligning omformes til

$$\frac{d(\beta^2)}{1-\beta^2} = - \frac{dr}{r^2(1-1/r)}$$

som integreret giver

$$\frac{1 - \beta^2}{1 - \beta_0^2} = \frac{1 - 1/r}{1 - 1/r_0}$$

Denne ligning kan også fås af ligningen  $e(r) = e(r_0)$ , se (13). Hvis  $\beta = |dr/dp|$  isoleres af denne ligning, kan  $dp$  udtrykkes ved  $dr$ , og ligningen kan integreres. Vi vil her kun se på tilfældet  $\beta_0 = 0$ .

Først isoleres  $\beta$ :

$$\beta = \sqrt{\frac{r_0/r - 1}{r_0 - 1}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dp}{dr} = - \frac{\sqrt{r_0-1}}{\sqrt{r_0/r - 1}}$$

hvoraf

$$p = \sqrt{r_0-1} \cdot r_0 \int_r^{r_0} \frac{1}{\sqrt{\frac{r_0}{r} - 1}} \cdot \frac{dr}{r_0}$$

og resultatet er

$$p = \sqrt{r_0-1} \cdot r_0 \left( \sqrt{\frac{r_0}{r} - 1} \frac{r}{r_0} + \text{Arctg} \left( \sqrt{\frac{r_0}{r} - 1} \right) \right)$$

For  $r \rightarrow 0$  finder vi  $p = \sqrt{r_0-1} \cdot r_0 \cdot \frac{\pi}{2}$  og  $\tau = \sqrt{r_0} \cdot r_0 \cdot \frac{\pi}{2}$  idet  $\tau = \sqrt{e} \cdot p = (1/\sqrt{B(r_0)}) \cdot p$ .

Udtrykket for  $\tau$  er præcis det samme som i Newtons teori! (Vis det)

Figurerne 6 og 7 nedenfor viser begge frit fald med begyndelsesfart 0. På fig.6 er som parameter benyttet  $p$ , som er proportional med partiklens egentid  $\tau$ , hvorimod der på fig.7 er benyttet parameteren  $t$ , egentiden for en fjern iagttagere.

I det første tilfælde vil partiklen passere  $r = 1$ , og vil nå  $r = 0$  i løbet af en endelig parameterværdi  $p$  og dermed en endelig egentid  $\tau$ . \*

Men i det andet tilfælde (fig.7) ligger banepunkterne tættere og tættere, jo nærmere partiklen er ved  $r = 1$ , og den fjerne iagttagere vil aldrig opleve, at partiklen passerer  $r = 1$ !

Differensen  $r - 1$  vil nærme sig eksponentielt til 0:

$$r - 1 = k \cdot e^{-t} \quad , \quad k = \text{konstant} \quad ( \text{for } r \sim 1 )$$

Denne relation kan checkes ved indsættelse i ligningerne (17).

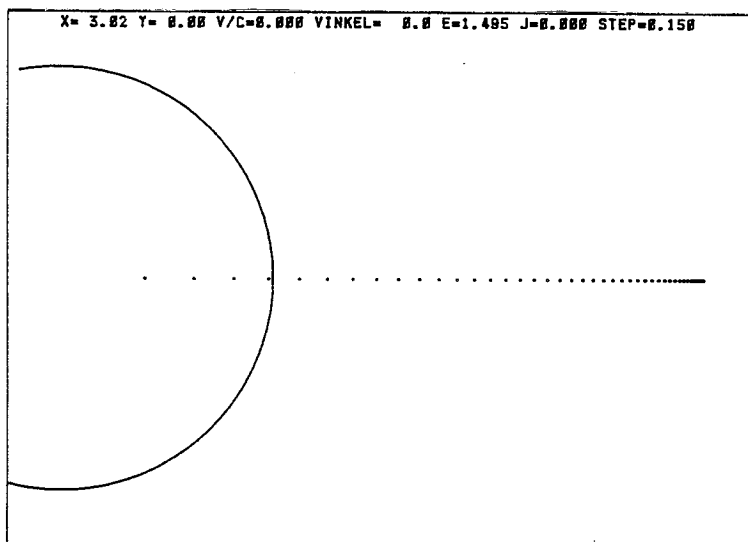


fig.6

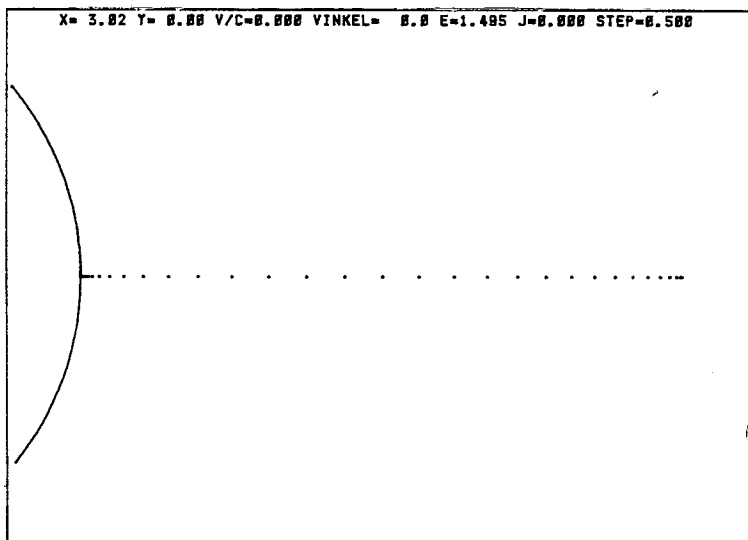


fig.7

Partiklens fart vil nærme sig lysets for  $r \rightarrow 1$ , selvom partiklen "går i stå"!

Forklaringen herpå er, at også lyset "går i stå" for  $r \rightarrow 1$ , når  $t$  bruges som parameter.

Partikelfarten i de banepunkter på fig.6, som har  $r < 1$ , er større end 1, altså  $\beta > 1$ , og det er ikke svært at vise (se nedenfor), at  $\beta \rightarrow \infty$  for  $r \rightarrow 0$ .

Eller udtrykt anderledes: koordinatsystemet "bevæger sig" hurtigere end lyset for  $r < 1$ , det er altså umuligt at have en partikel i hvile i dette område.

\* disse er

$$p = \pi/2 r_0 \sqrt{r_0 - 1}$$

$$\tau = \pi/2 r_0 \sqrt{r_0}$$

nr	x	y	r	v/c	e	j
35	1.7781	0.0000	1.778129	0.58800481	1.4950495099	0.0000000000
36	1.6872	0.0000	1.687176	0.62536070	1.4950495107	0.0000000000
37	1.5903	0.0000	1.590301	0.66712455	1.4950495125	0.0000000000
38	1.4868	0.0000	1.486758	0.71451194	1.4950495178	0.0000000000
39	1.3756	0.0000	1.375580	0.76928605	1.4950495226	0.0000000000
40	1.2555	0.0000	1.255471	0.83413296	1.4950495299	0.0000000000
41	1.1246	0.0000	1.124623	0.91341594	1.4950495596	0.0000000000
42	0.9803	0.0000	0.980349	1.01487233	1.4949682903	0.0000000000
43	0.8183	0.0000	0.818305	1.15409748	1.4949682693	0.0000000000
44	0.6304	0.0000	0.630412	1.36983381	1.4949682653	0.0000000000
45	0.3971	0.0000	0.397072	1.80831730	1.4949682639	0.0000000000

Tabel 2

De sidste 11 banepunkter på fig. 6 - forrige side.

nr	x	y	r	v/c	e	j
22	1.2957	0.0000	1.295666	0.81168688	1.4950494884	0.0000000000
23	1.2117	0.0000	1.211692	0.85953653	1.4950494693	0.0000000000
24	1.1456	0.0000	1.145617	0.89998162	1.4950494208	0.0000000000
25	1.0967	0.0000	1.096699	0.93176065	1.4950493198	0.0000000000
26	1.0624	0.0000	1.062417	0.95507366	1.4950491466	0.0000000000
27	1.0394	0.0000	1.039448	0.97121681	1.4950488961	0.0000000000
28	1.0246	0.0000	1.024566	0.98191275	1.4950485792	0.0000000000
29	1.0151	0.0000	1.015150	0.98678117	1.4950482570	0.0000000000
30	1.0093	0.0000	1.009284	0.99309994	1.4950479421	0.0000000000
31	1.0057	0.0000	1.005667	0.99577879	1.4950477219	0.0000000000
32	1.0035	0.0000	1.003451	0.99742620	1.4950482420	0.0000000000
33	1.0021	0.0000	1.002098	0.99843389	1.4950503044	0.0000000000
34	1.0013	0.0000	1.001274	0.99904824	1.4950569158	0.0000000000
35	1.0008	0.0000	1.000774	0.99942203	1.4950787729	0.0000000000
36	1.0005	0.0000	1.000469	0.99964919	1.4950998638	0.0000000000
37	1.0003	0.0000	1.000285	0.99978710	1.4952823430	0.0000000000
38	1.0002	0.0000	1.000173	0.99987080	1.4957448923	0.0000000000
39	1.0001	0.0000	1.000105	0.99992155	1.4971557813	0.0000000000
40	1.0001	0.0000	1.000064	0.99995231	1.5003528229	0.0000000000
41	1.0000	0.0000	1.000039	0.99997098	1.5053422700	0.0000000000

Tabel 3

De sidste 20 banepunkter på fig. 7 - forrige side.

Vi vil nu finde en sammenhæng mellem  $r$  og  $\beta$  for en bevægelse med begyndelsesfarten  $\beta_0$ . Denne bevægelse behøver ikke at være rettet langs  $\vec{r}$ , de følgende bemærkninger er gyldige for alle bevægelser.

Af (13) finder vi

$$e = \frac{1}{B(r)}(1 - \beta^2)$$

For  $r = r_0$  og  $\beta = \beta_0$  er

$$e = \frac{1}{B(r_0)}(1 - \beta_0^2)$$

Heraf finder vi så

$$(1 - \beta^2) = \frac{B(r)}{B(r_0)}(1 - \beta_0^2) = \frac{1 - 1/r}{1 - 1/r_0}(1 - \beta_0^2)$$

Det fremgår heraf, at hvis  $\beta_0 = 1$ , er også  $\beta = 1$ . Hvis  $\beta_0 < 1$ , vil  $\beta \rightarrow 1_-$  for  $r \rightarrow 1_+$ , og desuden ser vi, at  $\beta \rightarrow \infty$  for  $r \rightarrow 0$ . Relationen ovenfor kan let checkes i tabellerne 2 og 3.

Bevægelsesligningerne med  $t$  som parameter kan let fås ud fra ligningerne (3) og (4), her skal blot resultatet anføres (regn selv efter):

$$(17) \quad \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{\vec{r}}{2r^3} \left(1 - \frac{1}{r}\right) + 2 \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 - \frac{(3r-2)}{r^3(1-1/r)} \left(\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 + \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \left(\frac{\vec{r} \cdot d\vec{r}/dt}{r^3(1-1/r)}\right)$$

Med  $t$  som parameter er accelerationen således ikke rettet mod  $(0,0)$  men har også en komponent i hastighedens retning. Lad os til sidst se på den jævne cirkelbevægelse omkring et sort hul.

Parameterfremstillingen for bevægelsen er

$$(18) \quad \vec{r} = (r \cdot \cos(\omega \cdot p), r \cdot \sin(\omega \cdot p)), \quad \omega = \frac{2\pi}{T_p}$$

Heraf følger

$$\vec{v}_p = \frac{d\vec{r}}{dp} = (-r\omega \sin(\omega p), r\omega \cos(\omega p)) = \omega \cdot \hat{\phi}$$

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{v}_p}{dp} = (-r\omega^2 \cos(\omega p), -r\omega^2 \sin(\omega p)) = -\omega^2 \cdot \vec{r}$$

Af de to sidste ligninger finder vi

$$a_p = \frac{v_p^2}{r^2}, \quad \text{hvor } v_p = r\omega$$

Vi finder så af bevægelsesligningerne (4), idet  $\vec{r} \cdot \vec{v}_p = 0$ :

$$\frac{v_p^2}{r^2} = \frac{1}{2r^2} \cdot \frac{1}{(1-1/r)} \left(1 + 2v_p^2 \left(1 - \frac{1}{r}\right)\right)$$

eller, når  $v_p$  isoleres:

$$(19) \quad v_p = \frac{1}{\sqrt{2r} \cdot (1-1/r)}$$

Lysets fart  $c_p$  er givet ved (se (8) med  $\beta = 1$ ):

$$c_p = \frac{1}{\sqrt{1-1/r}}$$

De to sidste ligninger giver

$$(20) \quad \beta = \frac{v_p}{c_p} = \frac{1}{\sqrt{2r-2}}$$

Betingelsen  $\beta \leq 1$  giver, at  $r \geq 1,5$ .

Jævn cirkelbevægelse kan altså foregå med lyshastigheden for  $r = 1,5$ ! (jvf. fig.3)

For  $\beta = 1$  og  $r = 1,5$  finder vi

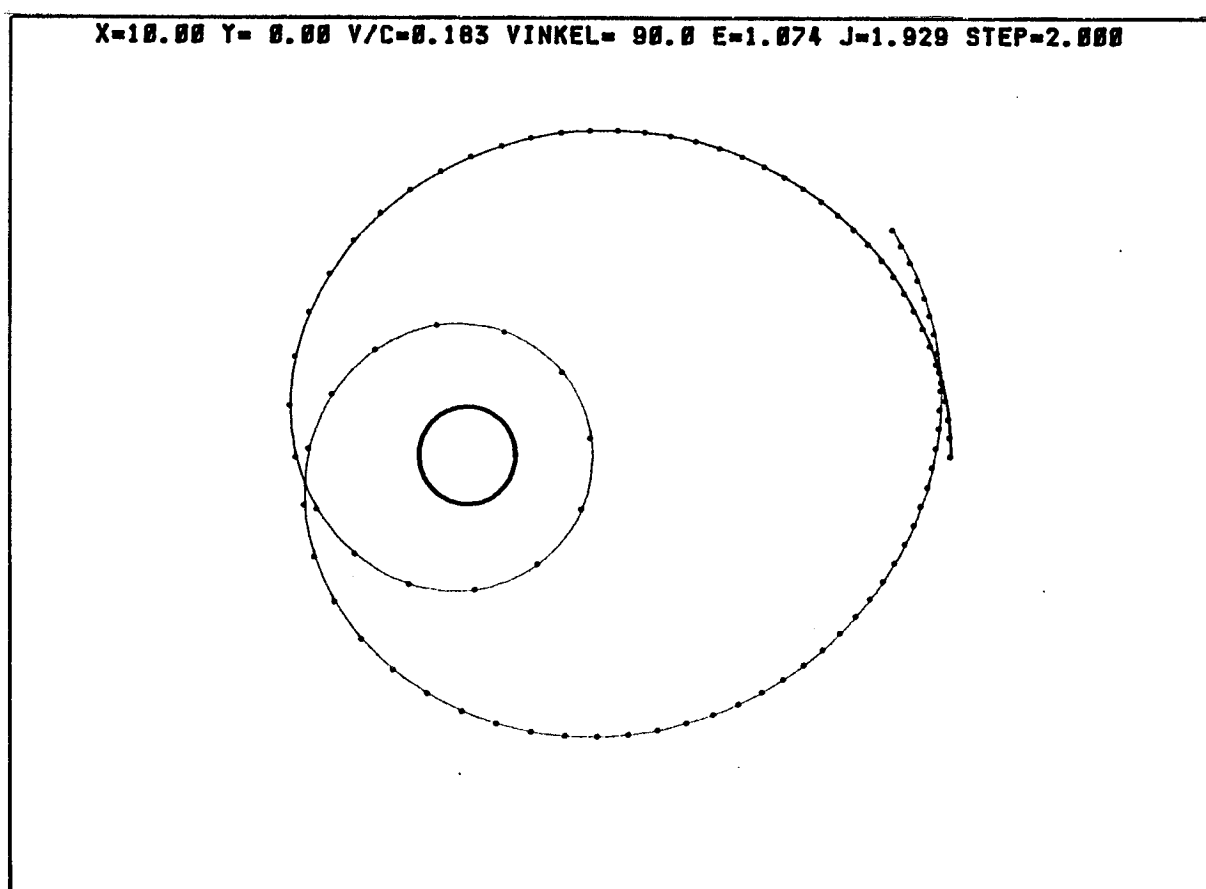
$$j = v_p \cdot r = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 1,5}} \cdot \frac{1}{(1 - 1/1,5)} \cdot 1,5 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

som postuleret i forbindelse med figur 3.

Litteratur:

Ref.1 :Steven Weinberg, Gravitation and Cosmology,  
John Wiley & Sons, 1972.

Ref.2 :L.D.Landau and E.M.Lifshitz, The Classical Theory of Fields,  
4.revised edition, Pergamon Press 1975, siderne 306-316.



Periheldrejning, parameter p.

## APPENDIKS

Således fremkommer bevægelsesligningerne:

Kvadratet på et lille egentidsinterval  $d\tau^2$  er givet ved

$$(1) \quad d\tau^2 = B(r)dt^2 - (A(r)-1)r^{-2}(\vec{r} \cdot d\vec{r})^2 - d\vec{r}^2$$

med  $B(r) = (1 - \frac{1}{r})$ ,  $A(r) = B(r)^{-1}$ .

Da  $d\tau^2$  også pr. definition (af  $g_{\mu\nu}$ ) er givet ved udtrykket

$$(2) \quad d\tau^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2$$

(Summation over dobbelt forekommende indices underforstået)  
hvor

$$(3) \quad x^0 = t, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y$$

kan vi aflæse  $g_{\mu\nu}$  ved sammenligning af (1) og (2) :

$$(4) \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & -1-Cx^2 & -Cyx \\ 0 & -Cxy & -1-Cy^2 \end{pmatrix} \quad \text{hvor } C = (A-1)r^{-2}$$

Vi får også brug for den inverse til  $g_{\mu\nu}$ , kaldet  $g^{\mu\nu}$  :

$$(5) \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & -B-y^2r^{-3} & xyr^{-3} \\ 0 & yxr^{-3} & -B-x^2r^{-3} \end{pmatrix}$$

Vi kan nu beregne de såkaldte Christoffel-symboler  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ , som indgår direkte i bevægelsesligningerne for frit fald (banekurven kaldes ofte en geodætisk kurve):

$$(6) \quad \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left( \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right)$$

Vi har brug for følgende (regn selv efter!):

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} \frac{x}{r^3} \left(1 - \frac{1}{r}\right)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{x}{r^3} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{r^2} \frac{(3r-2)}{r-1}\right)$$

$$\Gamma_{12}^1 = -\frac{x}{r^3} \frac{1}{2} \frac{xy}{r^2} \frac{(3r-2)}{r-1} = \Gamma_{21}^1$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{x}{r^3} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{y^2}{r^2} \frac{(3r-2)}{r-1}\right)$$

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = \Gamma_{20}^1 = \Gamma_{02}^1 = 0$$

Bevægelsesligningerne for frit fald er (se ref.1)

$$(7) \quad \frac{d^2 x^\mu}{dp^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{dp} \frac{dx^\lambda}{dp} = 0$$

For  $x^1 = x$  lyder denne ligning:

$$-\frac{d^2 x}{dp^2} = \Gamma_{11}^1 \left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dy}{dp}\right)^2 + 2\Gamma_{12}^1 \frac{dx}{dp} \frac{dy}{dp} + \Gamma_{00}^1 \left(\frac{dt}{dp}\right)^2$$

Vi vælger så tidsparameteren  $p$  sådan at

$$(8) \quad dp = \left(1 - \frac{1}{r}\right) dt$$

Indsættes  $\Gamma$  - symbolerne i ovenstående ligning, fås

$$\frac{d^2 x}{dp^2} = -\frac{x}{2r^3} \left(1 + 2\left(\frac{d\vec{r}}{dp}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{r}\right) - \frac{(3r-2)}{r^3} \left(\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dp}\right)^2\right) \frac{1}{(1-r^{-1})}$$

Ligningen for  $y$  bliver naturligvis tilsvarende.

Altså:

Bevægelsesligninger for frit fald:

$$(9) \quad \frac{d^2 \vec{r}}{dp^2} = -\frac{\vec{r}}{2r^3} \cdot \frac{1}{(1-r^{-1})} \cdot \left(1 + 2\left(\frac{d\vec{r}}{dp}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{r}\right) - \frac{(3r-2)}{r^3} \left(\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dp}\right)^2\right)$$