Raket-princippet

- *Fra www.borgeleo.dk*

Indhold

Indledning

Raketprincippet kunne lige så godt gå under navnet 'rekyl-princippet'. Det oplever jægeren når han/hun affyrer et skud med geværet. Under affyringen accelererer kuglen/kuglerne fremad, og geværet accelererer/bevæger sig modsat kuglen/kuglerne. Denne bevægelse af geværet må naturligvis 'absorberes' af jægerens skulder og senere krop.

Princippet er også i spil når et fly skal i luften. For at skabe en opdrift, skal flyet 'kaste' luft nedad. Vingerne (eller rotoren på en helikopter) er formet, så luftstrømmen dirigeres/accelereres nedad, og flyet 'sætter af' på denne nedadrettede luftstrøm og påvirkes selv af en kraft opad.

Og når et skib skal skabe en kraft der tillader det at bevæge sig fremad i vandet, skal skibets skruer skubbe/accelerere vandmasser bagud. Herved 'sætter skibet af' på de accelererede vandmasser og skaber en fremdrift.

Når raketter skal sendes op, sker det normalt ved at raketten med stor fart udsender/accelererer forbrændingsprodukter bagud – det bevirker at resten af raketten 'skubbes' fremad.

Kan vi beskrive alle disse fænomener ved hjælp af et enkelt princip? Svaret er ja. Vi skal have fat i Newtons 3. lov om aktion og reaktion, sammen med Newtons 2. lov, der fortæller os sammenhængen mellem kraftpåvirkning og acceleration af en kugle/luftmængde/vandmængde/forbrændingsprodukter.

Når vi arbejder matematisk med disse fænomener, er det – som vi skal se – hensigtsmæssigt at indføre begrebet bevægelsesmængde.

Alt dette vil blive uddybet i de kommende afsnit.

Grundlæggende principper – Newtons love og bevægelsesmængde

Vi lægger ud med at formulere de grundlæggende kraftlove, der er på spil når fænomenerne skal beskrives i matematiske/fysiske termer.

1.1 Newtons love

Newtons 2. lov

Når et legeme med massen m påvirkes af en resulterende kraft $\boldsymbol{F}$, vil det accelerere med accelerationen $\boldsymbol{a}$. Sammenhængen er

1. $\boldsymbol{F} = m \cdot \boldsymbol{a}$ *Newtons 2. lov*

SI-enhederne i denne ligning er $\mathrm{N} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s^2}$, hvor N (Newton) er SI-kraftenheden. Kraft og acceleration er begge vektorer (derfor fed skrift), og de er parallelle som det udtrykkes i denne ligning.

Ved acceleration forstås hastighedstilvækst pr. tidsenhed:

$\boldsymbol{a} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$, Δt lille *Acceleration*

SI-enheden er $\frac{\mathrm{m/s}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}}$, som nævnt ovenfor

Newtons 3. lov

Når et legeme 1 er påvirket af en kraft $\boldsymbol{F}_{1,2}$ fra et andet legeme 2, vil dette andet legeme være påvirket af en kraft fra det første legeme $\boldsymbol{F}_{2,1}$ af samme størrelse, men i modsat retning. Det udtrykkes kort i formlen

2. $\boldsymbol{F}_{1,2} = -\boldsymbol{F}_{2,1}$ Newtons 3. lov om aktion og reaktion

1.2 Bevægelsesmængde

Ved bevægelsesmængden af et legeme med masse m og hastighed $\boldsymbol{v}$ forstås størrelsen

3. $\boldsymbol{p} = m \cdot \boldsymbol{v}$ *Bevægelsesmængde, definition*

Bevægelsesmængden er således en vektor med samme retning som hastighedsvektoren.

SI-enheden er $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s}$.

1.3 Newtons 2. lov og bevægelsesmængde

Vi vil nu omformulere Newtons 2. lov så vi kan udnytte begrebet bevægelsesmængde. Af formlerne ovenfor finder vi

$$\boldsymbol{F} = m \cdot \boldsymbol{a} = m \cdot \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{m \cdot \Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}, \qquad \Delta t \text{ lille}$$

Størrelsen $m \cdot \Delta \boldsymbol{v}$ er tilvæksten i bevægelsesmængde $\Delta \boldsymbol{p}$, derfor kan Newtons 2. lov formuleres som

4. $$\boldsymbol{F} = \frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta t}, \qquad \Delta t \text{ lille} \qquad \text{Newtons 2. lov}$$

1.4 Bevarelse af bevægelsesmængde i et isoleret system

Har vi et system uden ydre kraftpåvirkning bestående af to del-legemer 1 og 2, der påvirker hinanden indbyrdes med kræfter, vil systemets samlede bevægelsesmængde være konstant (som vektor).

Her definerer vi systemets samlede bevægelsesmængde på følgende måde:

$$\boldsymbol{p}_{system} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 \qquad \textit{Bevægelsesmængde for system}$$

Sætningen ovenfor kan derfor formuleres

Uden ydre kræfter er systemets bevægelsesmængde konstant:

5. Hvis $\boldsymbol{F}_{ydre} = \boldsymbol{0}$ er $\boldsymbol{p}_{system} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{konstant}$

Begrundelsen er:

Kraften på legeme 1 fra legeme 2 $\boldsymbol{F}_{1,2}$ bevirker en acceleration af legeme 1 ifølge Newtons 2. lov – og dermed en tilvækst i bevægelsesmængden af legeme 1:

$$\boldsymbol{F}_{1,2} = m_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 = \frac{\Delta \boldsymbol{p}_1}{\Delta t}$$

Tilsvarende vil kraften på legeme 2 fra legeme 1 $\boldsymbol{F}_{2,1}$ bevirke en acceleration af legeme 2 ifølge Newtons 2. lov – og dermed en tilvækst i bevægelsesmængden af legeme 2:

$$\boldsymbol{F}_{2,1} = m_2 \cdot \boldsymbol{a}_2 = \frac{\Delta \boldsymbol{p}_2}{\Delta t}$$

Men ifølge Newtons 3. lov er $\boldsymbol{F}_{1,2} = -\boldsymbol{F}_{2,1}$ og dermed $\boldsymbol{F}_{1,2} + \boldsymbol{F}_{2,1} = \boldsymbol{0}$. Udtrykt ved bevægelsesmængder får vi så

$$\boldsymbol{F}_{1,2} = -\boldsymbol{F}_{2,1} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{F}_{1,2} + \boldsymbol{F}_{2,1} = \boldsymbol{0} \qquad \text{hvoraf} \qquad \frac{\Delta \boldsymbol{p}_1}{\Delta t} + \frac{\Delta \boldsymbol{p}_2}{\Delta t} = \boldsymbol{0}$$

Sættes på fælles brøkstreg, får vi

$$\frac{\Delta \boldsymbol{p}_1 + \Delta \boldsymbol{p}_2}{\Delta t} = \boldsymbol{0}$$

Størrelsen $\Delta \boldsymbol{p}_1 + \Delta \boldsymbol{p}_2$ ændres altså ikke med tiden, dvs. $\Delta \boldsymbol{p}_1 + \Delta \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{0}$.

Tilvæksten i systemets bevægelsesmængde er derfor

$$\Delta \boldsymbol{p}_{system} = \Delta \boldsymbol{p}_1 + \Delta \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{0}$$

Derfor er systemets bevægelsesmængde konstant (uændret i tiden) som påstået.

Det samme gælder hvis systemet består af flere del-legemer. Systemets bevægelsesmængde er her vektorsummen af bevægelsesmængderne for alle del-legemer i systemet.

1.5 Eksempel – bevarelse af bevægelsesmængde

I dette eksempel anvender vi ikke vektorer, da problemet er en-dimensionalt. Vi kan derfor nøjes med anvende hastighedskoordinater langs en akse parallel med hastighederne.

Vi vil regne på rekylet når vi skyder med en riffel med massen 3,5 kg. Kuglen har massen 5,0 g og affyres med farten 800 m/s.

Vi betegner riflens masse med M og kuglens masse med m. Kuglens hastighed lige efter affyringen betegner vi med u og riflens hastighed lige efter affyringen betegnes med v. Vi antager, at der er bevarelse af bevægelsesmængde. Det vil kun gælde meget kort tid efter affyringen, da jo jægerens skulder vil bremse riflens bevægelse.

Bevægelsesmængden før affyringen er 0, idet både kugle og riffel er i hvile. Altså:

$$p_{system,\ før} = 0$$

Efter affyringen er bevægelsesmængden

$$p_{system,\ efter} = m \cdot u + M \cdot v$$

Da vi antager bevarelse af bevægelsesmængde, er

$$p_{system,\ efter} = 0\ , \qquad \text{dvs.} \qquad m \cdot u + M \cdot v = 0$$

Vi omformer denne ligning til

$$M \cdot v = -m \cdot u$$

og dermed

$$v = -\frac{m}{M} \cdot u \tag{6.}$$

Vi indsætter de kendte størrelser:

$$v = -\frac{5{,}0\ \mathrm{g}}{3500\ \mathrm{g}} \cdot 800\ \mathrm{m/s} = -1{,}14\ \mathrm{m/s}$$

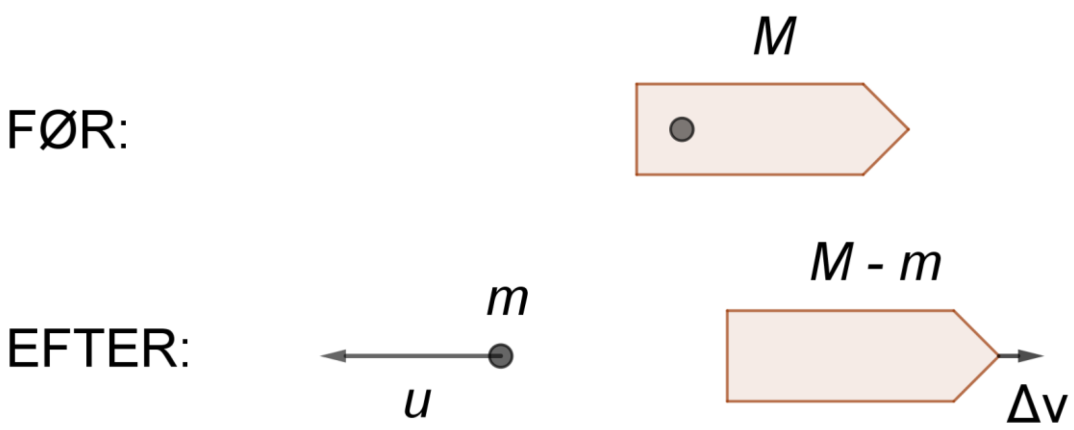
Riflens rekylfart er altså ca. $1\ \mathrm{m/s}$. Denne fart absorberes af jægerens skulder og efterfølgende krop.

Anvendelser: Hastighedstilvækst for raket mv – raketligningen

2.1 Hastighedstilvækst for raket mv - raketligningen

Ved brug af princippet om bevarelse af bevægelsesmængde kan vi opstille et udtryk for den hastighedstilvækst, raketten kan opnå efter at have brugt en lille del af brændstoffet. Af dette udtryk kan vi videre udlede den kraftpåvirkning en raketmotor kan yde. Der vil i de fleste tilfælde herud over være ydre kræfter, der påvirker raketten – såsom tyngdekraft, luftmodstand. Disse kræfter vil vi vende tilbage til på et senere tidspunkt. Og endelig kan vi udlede rakettens samlede hastighedstilvækst efter brug af alt brændstof.

Vi begynder med at beregne rakettens lille hastighedstilvækst Δv efter brug af en lille mængde brændstof med massen m. Brændstoffet udslynges med den konstante fart u relativt til raketten. Rakettens masse før afbrænding af den lille mængde brændstof betegnes M. Se figur 1 nedenfor.



Figur 1: raketten før og efter en lille brændstof-afbrænding set fra rakettens øjeblikkelige hvilesystem før

Systemets bevægelsesmængde før den lille afbrænding af brændstof er i rakettens hvilesystem 0. Da vi har bevarelse af bevægelsesmængde, har vi derfor, at bevægelsesmængden også efter er 0:

$$m \cdot (-u) + (M - m) \cdot \Delta v = 0$$

Vi isolerer Δv fra denne ligning:

$$\Delta v = \frac{m}{M-m} \cdot u$$

Da der er tale om en meget lille mængde brændstof, er m meget mindre end M, så vi kan forenkle udtrykket til

7. $$\Delta v = \frac{m}{M} \cdot u$$ Lille tilvækst Δv i rakettens hastighed v

Dette udtryk er i realiteten det samme som 6. i eksemplet ovenfor.

2.2 Kraft fra raketmotor

Vi vil udnytte formlen 7 til at finde et udtryk for den kraft, raketten påvirkes med pga. afbrændingen af brændstoffet.

Først deler vi på begge sider med varigheden Δt af afbrændingen af den lille mængde brændstof:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{m}{\Delta t} \cdot \frac{u}{M}$$

Herved har vi et udtryk for rakettens acceleration.

Vi ganger herefter med rakettens masse M på begge sider:

$$M \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{m}{\Delta t} \cdot u$$

Venstresiden er – ifølge Newtons 2. lov – kraften på raketten, og dermed har vi udledt formlen

8. $$F_{raketmotor} = \frac{m}{\Delta t} \cdot u$$ kraft fra raketmotor

Størrelsen $m/\Delta t$ er brændstofforbruget pr. tidsenhed, og u er den fart, brændstoffet udslynges med fra raketmotoren.

Saturn V – raketterne havde ved liftoff et brændstofforbrug på 14 ton pr. sekund og brændstoffet forlod raketmotorerne med farten 2,4 $\mathrm{km/s}$. Det giver en samlet raketkraft (thrust) på

$$F_{raketmotor} = \frac{m}{\Delta t} \cdot u = 14 \cdot \frac{10^3 \mathrm{kg}}{\mathrm{s}} \cdot 2{,}4 \cdot \frac{10^3 \mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 34 \cdot 10^6 \mathrm{N}$$

Dette er (næppe overraskende) mere end tyngdekraften på raketten ved liftoff:

$$F_{tyngde,\ raket} = m_{raket} \cdot g = 2{,}8 \cdot 10^6\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}8\, \mathrm{m/s^2} = 27 \cdot 10^6\ \mathrm{N}$$

Øvelse 1: hvilken acceleration havde Saturn V ved liftoff?

2.3 Hastighedstilvækst for raket (uden ydre kræfter) - Tsiolkovskis raketligning 1903

Vi kan udnytte formlen 7 til mere: vi kan også beregne rakettens hastighedstilvækst ved integration. Hvis du ikke kender denne regneart, kan du springe udledningen over og gå direkte til resultatet formel 9.

Vi tager udgangspunkt i formel 7, som vi gentager her:

$$\Delta v = \frac{m}{M} \cdot u$$

Vi minder om, at brændstofmassen m var en del af rakettens masse, derfor er $m = -\Delta M$. Minusset skyldes at rakettens masse formindskes.

Vi kombinerer nu formlen $m = -\Delta M$ og Δv formlen og får

$$\Delta v = \frac{-\Delta M}{M} \cdot u$$

Denne hastighedstilvækst er beregnet i rakettens hvilesystem, men er den samme i ethvert andet inertialsystem efter Galilei-transformationen. Derfor giver det mening at addere disse små tilvækster til en samlet hastighedstilvækst som vi gør det nedenfor.

Før integrationen skifter vi til differentialer ('ekstremt små tilvækster'):

$$dv = \frac{-dM}{M} \cdot u$$

Idet vi regner med, at udstødningsfarten for brændstoffet u er konstant, kan vi integrere:

$$\int_{v_0}^{v} dv = -u \cdot \int_{M_0}^{M_f} \frac{1}{M} dM$$

Her er M_0 rakettens begyndelsesmasse inklusiv brændstof, og M_f er rakettens slutmasse (*f* = *final*).

Formlen ovenfor medfører at

$$v - v_0 = -u \cdot (\ln(M_f) - \ln(M_0))$$

som igen kan omformes til

Tsiolkovskij's raketligning 1903

9. $$v - v_0 = u \cdot \ln(M_0/M_f)$$ samlet hastighedstilvækst for raket

Her er v rakettens sluthastighed, v_0 er rakettens begyndelseshastighed. Størrelsen u er brændstoffets udstødningsfart relativt til raketten. M_0 er begyndelsesmassen inklusiv brændstof, og M_f er slutmassen (*f* = *final*).

M_0/M_f kaldes masseforholdet, og dette tal bestemmer sammen med udstødningsfarten u hvilken hastighedstilvækst raketten maksimalt kan opnå.

Hvis fx 90% af rakettens masse er brændstof, er masseforholdet $M_0/M_f = 10$ når alt brændstof er brugt. Derfor bliver

$$v - v_0 = u \cdot \ln(M_0/M_f) = u \cdot \ln(10) \approx 2{,}3 \cdot u$$

Hastighedstilvæksten for raketten er derfor 2,3 gange udstødningsfarten for brændstoffet.

Omvendt: hvis vi kender rakettens hastighedstilvækst og udstødningsfarten for brændstoffet, kan brændstofandelen af rakettens begyndelsesmasse beregnes.

Øvelse 2: udstødningsfarten for en bestemt type raketbrændstof er $4{,}0 \cdot 10^3\ \mathrm{m/s}$ og raketten skal have en hastighedstilvækst på $10\ \mathrm{km/s}$ når al brændstof er brugt. Beregn hvilken andel brændstoffet skal udgøre af rakettens begyndelsesmasse.

Øvelse 3: isoler raketmassen M_f af Tsiolkovskij's ligning og beregn denne for en raket med brændstof-udstødningsfarten $3{,}5 \cdot 10^3 \text{ m/s}$, hastighedstilvæksten 12 km/s og begyndelsesmassen 150 ton.

Den russiske raketforsker Konstantin Tsiolkovskij var ikke den første til at udlede ligningen, men hans navn er knyttet til ligningen, fordi han var den første til at anvende ligningen til at besvare spørgsmålet om raketter kunne opnå tilstrækkelig fart til at gennemføre rumrejser.

2.4 Flertrinsraketter

Tsiolkovskij's formel kan også bruges til at belyse, hvorfor man med flertrinsraketter kan opnå en større fart for en given mængde brændstof end med en et-trins raket. Det er dog ikke overraskende, fordi man – efter at brændstoffet i fx første trin er opbrugt – skiller sig af med den nu overflødige 'hardware' fra 1. trin. Der er så efterfølgende mindre masse at accelerere og slutfarten kan derfor øges.

Det illustreres i følgende øvelse.

Øvelse 4: En raket med begyndelsesmassen 400 ton (inklusiv brændstof) har en brændstofmængde på 360 ton. Udstødningsfarten for forbrændingsgasserne er $3{,}2 \cdot 10^3 \text{ m/s}$ både som 1-trinsraket og for begge trin i 2-trinsraketten.

a) Beregn tilvæksten i rakettens fart når den 'affyres' som en et-trins raket

Vi forestiller os, at vi deler raketten op i to trin, hvor hvert trin har massen 200 ton og brændstofmængden 180 ton.

Vi 'fyrer' først brændstoffet i 1. trin af.

b) Beregn hastighedstilvæksten efter 1. trin

Herefter frigøres de 20 ton 'hardware' fra 1. trin. Og brændstoffet i 2. trin brændes nu af.

c) Beregn hastighedstilvæksten efter 2. trin
d) Læg det to hastigheds-tilvækster for hvert trin sammen og sammenlign med hastighedstilvæksten fra spørgsmål a). Konklusion?

2.5 Raketbevægelse i tyngdefelt

En raket der opsendes fra Jorden eller et andet himmellegeme vil – ud over kraften fra raketmotoren – også være påvirket af en tyngdekraft og evt. luftmodstand. Her vil vi i første omgang kun beskæftige os med tyngdekraften som ydre kraft på raketten. Og begrænse diskussionen til lodret affyring af raketten.

Den resulterende kraft på raketten er så

10. $$F_{res} = F_{raketmotor} + F_{tyngde}$$

Vi bruger så Newtons 2. lov og det udtryk for motorkraften, vi har udledt ovenfor – sammen med formlen for tyngdekraften:

11. $$M \cdot \frac{dv}{dt} = -\frac{dM}{dt} \cdot u - M \cdot g$$

hvor vi har sat $\frac{m}{\Delta t} = -\frac{dM}{dt}$ - forbrændingshastigheden af brændstoffet

Vi omformer bevægelsesligningen 11 til

$$\frac{dv}{dt} = -u\frac{dM/dt}{M(t)} - g$$

Denne ligning kan umiddelbart integreres:

$$v - v_0 = -u \cdot \int_0^t \frac{dM/dt}{M(t)} dt - g \cdot t = -u \cdot \int_{M_0}^{M_f} \frac{1}{M} dM - g \cdot t$$

hvor vi i den sidste omformning skifter integrationsvariabel fra tiden t til massen M.

Her er M_0 er rakettens begyndelsesmasse, inklusiv brændstof, og M_f er slutmassen.

Vi udregner integralet:

$$v - v_0 = -u \cdot \left[\ln(M_f) - \ln(M_0)\right] - g \cdot t$$

og regnereglen $\ln(x) - \ln(y) = \ln(x/y)$ giver så endelig

12. $$v - v_0 = u \cdot \ln\left(\frac{M_0}{M_f}\right) - g \cdot t$$ hastighedstilvækst i tyngdefelt

Det pointeres, at formlen gælder også efter at brændstoffet er opbrugt – eller efter at raketmotoren slukket. Når dette er tilfældet, vil 'raketleddet' $u \cdot \ln\left(\frac{M_0}{M_f}\right)$ blot være en konstant, mens det nu frie fald fortsætter. Begyndelseshastigheden i dette frie fald efter at brændstoffet er opbrugt vil være $v_0 + u \cdot \ln\left(\frac{M_0}{M_f}\right)$.

Denne formel er identisk med Tsiolkovskij's raketligning 9 på nær leddet $-g \cdot t$. Dette burde selvfølgelig ikke undre, da Tsiolkovskij's raketligning 9 vil være gældende i et frit faldende inertialsystem, og dette system vil netop falde med hastigheden $-g \cdot t$.

Skal vi integrere 12 yderligere for at bestemme højden som funktion af tiden, må vi kende funktionen $M(t)$. Fx kunne vi antage, at forbrændingshastigheden er konstant, så $M(t)$ er en lineært aftagende funktion af tiden

$$M(t) = M_0 - \mu \cdot t$$ konstant forbrændingshastighed μ

Herefter kan vi integrere 12 og finde rakettens højde som funktion af tiden. Denne øvelse overlader vi imidlertid til læseren!