1 Relativitetsprincippet i Newtons fysik

1. Indledning - beskrivelsessystemer

Enhver fysisk teori arbejder med begreber som rum og tid. F.eks. forudsætter udsagnet "partiklen befinder sig i punktet P(x,y,z) til tiden t " at vi beskriver den fysiske situation i forhold til et af os selv valgt koordinatsystem, og at tiden kan defineres ved henvisning til nogle ures visning. Hvis vi ikke gør os klart, hvilke systemer vi arbejder i, har de fysiske teorier ingen mening.

Angivelsen af rum og tid kunne være "Jeg befandt mig på Stenløse Gymnasium og HF torsdag d. 4. januar kl. 12.00." Positionen er her fastlagt i forhold til en bygning, der igen er placeret et bestemt sted i Stenløse, der igen er placeret et kendt sted på Sjælland - placeret i Danmark, hvis placering på verdenskortet er kendt. Jorden er placeret et sted i Solsystemet, der igen er placeret et sted i den galakse, der kaldes Mælkevejen - indeholdende mere end 200 milliarder stjerner. Mælkevejen er igen placeret i et større system af Galakser, der kaldes den lokale hob. Denne er igen én af mange kendte hobe af galakser ..... Tiden er mellemeuropæisk tid. Vi vil ikke her gå ind på problemerne med at fastlægge denne tids-størrelse.
Det er således ikke helt enkelt at fastlægge sin egen position i det store rum, vi eksisterer i.
Også vores *bevægelse* er ganske kompliceret: vi bevæger os i forhold til jordoverfladen, der igen roterer én gang om jordaksen på ca. 24 timer, og jorden bevæger sig én gang rundt om Solen på et år, Solen med hele solsystemet bevæger sig rundt i Mælkevejen på ca. 250 mio. år, Mælkevejen... Bedømt af en iagttager uden for Mælkevejen vil vi alle være med i en meget kompliceret bevægelse.

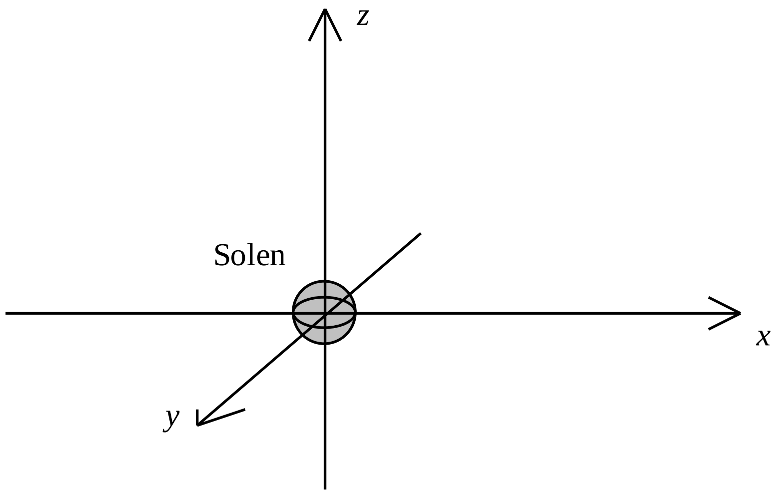


Fig.1: det helio-centriske system med faste akseretninger til meget fjerne objekter er med meget god tilnærmelse et inertialsystem!

I den Newtonske fysik er det ikke alle beskrivelses-systemer, der kan anvendes, når Newtons love skal bruges på den mest enkle form. De systemer, hvori Newtons love umiddelbart kan bruges, kaldes *inertialsystemer*. Har man først fundet *et* inertialsystem, vil der være uendelig mange flere - nemlig alle de beskrivelses-systemer, der bevæger sig med *konstant hastighed* i forhold til det først fundne.

Findes der da eksempler på inertialsystemer? Tjah. Et rigtig godt eksempel på et inertialsystem er det beskrivelses-system, der har centrum i Solens centrum og som har faste akse-retninger i forhold til fjerne objekter i universet, f.eks. de såkaldte kvasarer, der er nogle af de fjerneste objekter, man kender idag. Dette system kaldes "Det Kopernikanske system" - opkaldt after Kopernikus, der havde mod til at påstå, at Solen var universets centrum - og ikke jorden! Dette system kaldes også "det helio-centriske system".

I dette system er det f.eks. muligt ved hjælp af Newtons love - og Newtons gravitationslov - at forudberegne planeternes positioner under indflydelse af tyngdekraften fra Solen og de indbyrdes tyngdekræfter mellem planeterne. Disse beregninger kan forudsige planeternes bevægelser med meget stor nøjagtighed.

Et *inertialsystem* kan altså beskrives som et system, der ikke er accelereret (og som altså heller ikke roterer) i forhold til fjerne objekter i universet. Skal Newtons love anvendes i andre (f.eks. roterende) systemer, skal der til den resulterende kraft medregnes de såkaldte *fiktive* kræfter: nemlig centrifugalkræfter, Corioliskræfter m.v. Medregnes disse, kan Newtons love anvendes i *alle* beskrivelses-systemer.

Vi vil nedenfor begrænse os til inertialsystemer, hvor Newtons kraft- og bevægelseslove er på den enkleste form.

2. Newtons love

Newtons love kan formuleres på følgende måde:

N1. Inertiens lov:

et legeme, der ikke er påvirket af kræfter, vil bevæge sig retliniet med konstant hastighed - eller være i hvile.

N2. Newtons bevægelsesligning:

Den resulterende kraft på et legeme er årsag til legemets acceleration, og sammenhængen mellem resulterende kraft $\boldsymbol{F}$ og acceleration $\boldsymbol{a}$ er

(2.1) $$\boldsymbol{F} = m \cdot \boldsymbol{a}$$

hvor m er legemets masse. Altså: resulterende kraft lig med masse gange acceleration. Den resulterende kraft er lig med vektorsummen af alle de enkeltkræfter (tyngdekræfter, elektriske kræfter, magnetiske kræfter, ...), der virker på legemet.

N3. Loven om aktion og reaktion:

Hvis *et* legeme påvirker et *andet* legeme med en kraft, så vil dette *andet* legeme påvirke det første legeme med en lige så stor, men modsat rettet kraft.

Som det ses, er Newtons 1. lov en følge af den anden: hvis den resulterende kraft $\boldsymbol{F}$ er $\mathbf{0}$, så er også accelerationen $\mathbf{0}$, og dermed er hastigheden konstant, således at partiklen vil bevæge sig langs en ret linie med konstant fart. Den første lov tjener udelukkende til at fastslå, at bevægelse med konstant hastighed ingen kraft kræver.

Ved anvendelsen af Newtons love på denne form forudsættes det, at det anvendte beskrivelses-system er et inertialsystem.

Da jorden roterer om sin akse én gang på ca. 24 timer i forhold til stjernehimlen, opfylder et laboratorium, der er placeret på jorden, ikke kravene til anvendelse af Newtons love på ovenstående form. Men for bevægelser af forholdsvis kort udstrækning i rum og tid, kan vi med ret god tilnærmelse bruge Newtons love på ovenstående form. For bevægelser af længere varighed (sammenlignet med 24 timer) er det nødvendigt at medregne de før nævnte fiktive kræfter til den resulterende kraft (Centrifugalkræfter, Corioliskræfter m.v.). Det gælder f.eks. ved beskrivelsen af havstrømmes bevægelse og luftstrømmes bevægelse.

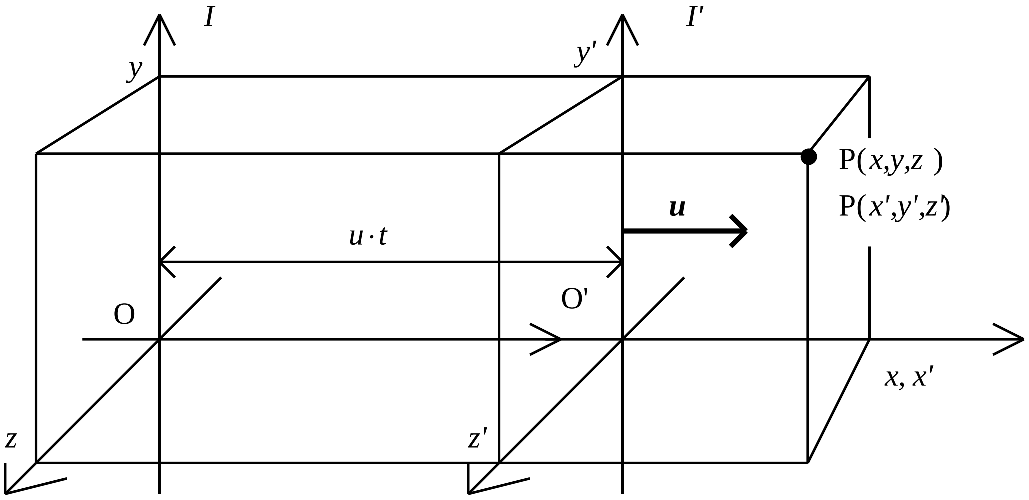
3. Galilei-transformationen

Vi vil nu specielt sammenligne inertialsystemer, for at se, hvordan positioner og bevægelser ser ud, når de bedømmes fra to *forskellige* inertialsystemer. Desuden vil vi sammenligne formuleringen af Newtons love i de to forskellige systemer.

I ethvert inertialsystem gælder (også) Newtons 1. lov - altså vil et legeme uden påvirkning af kræf-ter bevæge sig retliniet med konstant fart - det, der kaldes *jævn* bevægelse. Bedømt fra et andet inertialsystem (som bevæger sig med konstant hastighed i forhold til det første) vil legemets bevæ-gelse ligeledes bedømmes som jævn - men nu blot med en *anden* (konstant) hastighed.

Tænk f.eks. på en bils bevægelse, når den kører med konstant fart på en lige landevej. Farten kan f.eks. være 80 km/h - når du - stående i vejkanten - måler bilens fart. Kommer du imidlertid selv kørende i samme retning på samme landevej med farten 50 km/h, vil den anden bil naturligvis ikke bevæge sig med 80 km/h *i forhold til din egen bil*.

Bedømmensen af hastigheden af et legeme vil derfor (naturligvis) være afhængig af, hvilket beskrivelses-system, der anvendes.
Vi vil nu se nøjere på, hvordan tider, positioner, hastigheder, kræfter m.v. sammenlignes, når de måles fra to forskellige inertialsystemer. Betragt figur 2 nedenfor.



*Figur 2: De to inertialsystemer I og I' er akseparallelle, og I' bevæger sig med den konstante hastighed **u** langs x-aksen i I.*

De to inertialsystemers akseretninger er valgt sådan at hastigheds-retningen for systemet *I'* i forhold til systemet *I* er parallel med *x*-akserne i begge systemer. Desuden er *y*- og *z*-akserne valgt parallelle med henholdsvis *y'* og *z'*-akserne. Begyndelsespunkterne i de to systemer kaldes O' og O. Begge disse har i hver deres system koordinaterne (0,0,0). I systemet *I* har begyndelsespunktet O' *x*-koordinaten $u \cdot t$, hvor *t* er den tid, der er passeret siden begyndelsespunktet O' passerede begyndelsespunktet O - målt fra inertialsystemet *I*.

En partikels *position* P *til et bestemt tidspunkt* har koordinater, der kan måles fra begge inertialsystemer. I systemet *I'* er partiklens koordinater (x', y', z') til tidspunktet *t'*, og i systemet *I* er koordinaterne (x, y, z) til tidspunktet *t*.
Sammenhængen mellem koordinaterne for punktet P i de to systemer er givet ved den såkaldte Galilei-transformation:

Galilei-transformationen:

(3.1) a) $x' = x - u \cdot t$ b) $y' = y$ c) $z' = z$
(3.2) $t' = t$
(3.3) $m' = m$
(3.4) $\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{F}$

Det antages altså, at tiderne *t* og *t'* i de to systemer er ens - dvs. tiden (og dermed varigheden af alle processer) er upåvirket af den relative bævægelse af de to systemer.
Desuden viser (3.1), at længdemåling i systemet *I'* vil give samme resultat som systemet *I*.
(Dette indses ved *på et givet tidspunkt t* at måle *x, y* og *z* koordinaterne for to positioner P_1 og P_2 , hvis afstand vi ønsker at kende. Kaldes *x*-koordinater x_1 og x_2 , vil ifølge (3.1)

$$\Delta x' = x_2' - x_1' = (x_2 - u \cdot t) - (x_1 - u \cdot t) = x_2 - x_1 = \Delta x$$

Desuden er ifølge (3.1) $\Delta y' = \Delta y$ og $\Delta z' = \Delta z$ - og hermed er også afstandene mellem de to positioner ens i begge systemer, idet jo

$$|\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} = \sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2} = |\mathrm{P}_1'\mathrm{P}_2'|$$

)
Udover de rumlige koordinater antages også, at massen *m* (*m'*) af en partikel er uændret, og endelig antages, at en kraft ***F*** (***F'***) ikke ændres ved system-skiftet.

En partikels position P vil med tiden ændres, og herved får de rumlige koordinater tilvækster. Ser vi på et kort tidsrum Δt , vil partiklens hastighedskoordinater i systemet *I* være

(3.5) $v_x = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ $v_y = \dfrac{\Delta y}{\Delta t}$ $v_z = \dfrac{\Delta z}{\Delta t}$

Tilsvarende er den samme partikels hastighedskoordinater bedømt fra systemet *I'*

(3.6) $$v'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} \qquad v'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} \qquad v'_z = \frac{\Delta z'}{\Delta t'}$$

Af (3.2) følger, at $\Delta t' = \Delta t$. Desuden finder vi af (3.1), at

(3.7) $$\Delta x' = \Delta x - u \cdot \Delta t \qquad \Delta y' = \Delta y \qquad \Delta z' = \Delta z$$

Af (3.5) og (3.6) sammenholdt med (3.7) får vi så

Galileitransformation for hastighed:

(3.8) $$v'_x = v_x - u \qquad v'_y = v_y \qquad v'_z = v_z$$

På vektorform kan denne ligning skrives

(3.8a) $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$ eller $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}'$

Den sidste ligning kan formuleres: partiklens hastighed i systemet *I* er lig med *medførings-hastigheden* ***u*** (hastigheden af *I'* - systemet) plus den relative hastighed i systemet *I'*.
Dette er hastighedstransformationen hørende til Galilei-transformationen.

Eksempel En passager i et tog bevæger sig med farten 10 km/h ned gennem toget i togets bevægelsesretning. Toget bevæger sig med farten 120 km/h på skinnelegemet.
Ved hjælp af (3.8a) finder vi nu passagerens fart i forhold til skinnelegemet:

$$v = u + v' = 120\ \mathrm{km/h} + 10\ \mathrm{km/h} = 130\ \mathrm{km/h}$$

Øvelse 1 En passagerbåd bevæger sig med farten 70 km/h på vandoverfladen. På båden bevæger en passager sig *på tværs* af bådens bevægelsesretning med farten 10 km/h.
Hvilken fart har denne passager i forhold til vandoverfladen?

Tilsvarende kan vi nu se på tilvækster i *hastigheds*koordinater for partiklen i de to systemer. Af (3.8) følger (idet *u* er konstant):

(3.9) $$\Delta v'_x = \Delta v_x \qquad \Delta v'_y = \Delta v_y \qquad \Delta v'_z = \Delta v_z$$

Partiklens acceleration er tilvækst i hastighed pr. tidsenhed, dvs.

(3.10) $$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \qquad a_y = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \qquad a_z = \frac{\Delta v_z}{\Delta t}$$

Tilsvarende ligninger gælder i systemet *I'*.

Og da $\Delta t' = \Delta t$, vil ifølge (3.9) accelerationer være ens i de to systemer:

Galilei-transformation for acceleration:

(3.11) $a'_x = a_x$ $a'_y = a_y$ $a'_z = a_z$

På vektorform kan disse ligninger naturligvis skrives:

(3.11a) $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}$

Newtons 2. lov formuleret i systemet *I* kan i koordinater skrives

(3.12) $F_x = m \cdot a_x$ $F_y = m \cdot a_y$ $F_z = m \cdot a_z$

Eller på vektorform:

(3.12a) $\boldsymbol{F} = m \cdot \boldsymbol{a}$

Dette er altså bevægelsesligningen for partiklen i systemet *I*.
Hvis (3.12) er korrekt i systemet *I*, kan vi få en ligning, der også er korrekt i systemet *I'* udfra (3.12) ved at udtrykke de fysiske størrelser i (3.12) ved hjælp af størrelser målt i systemet *I'*. Accelerationen i systemet *I* er den samme som i systemet *I'* ifølge (3.11), derfor kan vi blot erstatte a_x, a_y og a_z i (3.12) med de tilsvarende mærkede størrelser - og vi har stadig en korrekt ligning. Desuden kan vi uden videre erstatte massen *m* med massen *m'* - massen i systemet *I'*. Disse størrelser er ifølge (3.3) ens. Desuden er ifølge (3.4) en kraft den samme - uanset systemet. Derfor erstatter vi F_x, F_y og F_z med de tilsvarende kraftkoordinater i systemet *I'*. Herved får vi altså fra (3.12) endelig følgende bevægelsesligning i systemet *I'*:

(3.13) $F'_x = m' \cdot a'_x$ $F'_y = m' \cdot a'_y$ $F'_z = m' \cdot a'_z$

Skrevet på vektorform:

(3.13a) $\boldsymbol{F}' = m' \cdot \boldsymbol{a}'$

Men dette er jo blot Newtons 2. lov formuleret i systemet *I'*. Newtons 2. lov har således samme matematiske form i de to inertialsystemer. Vi siger, at *Newtons 2. lov er gyldig i begge systemer*.

Desuden vil en partikel, der bevæger sig med konstant hastighed i systemet *I*, ligeledes bevæge sig med en (anden) konstant hastighed i systemet *I* - ifølge (3.8). Hvis Newtons 1. lov er rigtig i et system *I*, vil den ligeledes være rigtig i systemet *I'*. Altså er også Newtons 1. lov form-invariant ved en Galilei-transformation.

Endelig er ændres kræfter ikke ved en Galilei-transformation. Heraf følger, at hvis to kræfter er lige store og modsat rettede i et inertialsystem *I* (på et bestemt tidspunkt), vil de også være det set

fra ethvert andet inertialsystem *I'* (til det samme tidspunkt!). Newtons 3. lov er hermed også forminvariant ved en Galileitransformation.
Alle Newtons 3 love er altså gyldige i ethvert inertialsystem. Denne sætning kaldes *mekanikkens relativitetsprincip*.

Mekanikkens relativitetsprincip:

(3.14) Newtons 3 love er forminvariante, når de underkastes en Galileitransformation. *Alle inertialsystemer er derfor lige anvendelige, når det gælder om at analysere et mekanisk problem. Dvs. et problem, hvor Newtons love anvendes til analysen.*

En konsekvens af dette princip er, at alle bevægelser styret af Newtons love herved bliver *relative*: vi kan kun tale om, at en partikel bevæger sig *i forhold til* et inertialsystem - det har *ingen mening blot at tale om, at en partikel blot bevæger sig.* Eller udtrykt anderledes: der er ingen faste holdepunkter i rummet!

Hvis du for eksempel spiller bordtennis ombord på en damper i stille vejr, vil bolden opføre sig på fyldstændig samme måde som den ville gøre, hvis du spillede bordtennis med fast grund under fødderne. Hvis spillet foregår i et lukket rum, vil du ikke kunne afgøre, om skibet ligger ved kajen eller allerede er på vej til næste havn. Newtons love har ikke ændret form på grund af bevægelsen - hvis den er jævn. Derfor opfører bolden sig "som den plejer".

Ligeledes er eksperimenter udført på jorden ikke påvirket af, at jorden bevæger sig ganske hurtigt i sin bane rundt om jorden - set fra et inertialsystem med centrum i Solen og aksefaste retninger i forhold til fjerne objekter ("fix-stjerner"). Faktisk er jordens fart i dette system ca. 30 kilometer *i sekundet!*
(vi ser her bort fra de *i korte tidsrum* små virkninger af jordens rotation om jordaksen og jordbanens krumning - og deraf følgende acceleration af jorden - i banen omkring Solen).

Vi udelader foreløbig fænomener, der vedrører elektriske og magnetiske felter, af disse betragtninger.

Det skal bemærkes, at Newton ikke selv formulerede mekanikkens relativitetsprincip. Tværtimod mente Newton, at rummet var absolut, således at der kan tales om *faste punkter* i rummet, og at bevægelse ikke blot var relativ, men absolut: bevægelsen foregår i forhold til det absolutte rum. Newton ville dog ikke lægge sig fast på, hvordan dette "absolutte" system skulle udpeges. Ligeledes opfattede Newton tiden som absolut: tidens gang påvirkes ikke af nogetsomhelst, heller ikke bevægelse.

Denne sidste påstand om den absolutte tid er i overensstemmelse med ligning (3.2) - tidens gang påvirkes ikke af bevægelse.

2 Lysets bevægelse

1. Æterteorien

Vi vil nu undersøge, hvordan lysets bevægelse giver problemer med Galilei-transformationen.
Lyset er elektromagnetiske bølger, der også kan bevæge sig i det tomme rum. Dette er selvfølgeligt vanskeligt at forstå: hvordan kan nogen bølge bevæge sig i "ingenting"? F.eks. kan lyd ikke udbrede sig, hvis der ikke er luft (eller andet stof) tilstede - lydbølger er jo svingninger af luftmolekyler - derfor: ingen molekyler - ingen lyd. Tilsvarende med bølger i/på vand: intet vand - ingen vandbølger. En bølge skal altså tilsyneladende have et *medium* at udbrede sig i. Bølgens fart skal så måles i forhold til dette medium.
Tilsvarende forestillede fysikerne i slutningen af 1800-tallet, at lyset - og alle andre elektromagnetiske bølger - måtte bevæge sig i et medium, som man valgte at kalde *æteren* (det har intet med det kemiske stof æter at gøre!). Denne *æter* optræder stadig i vort sprog, når f.eks. man f.eks. siger, at en radioudsendelse er gået *i æteren*.
Denne æter må også udfylde det såkaldte tomme rum - ellers kunne vi jo ikke få lys igennem fra f.eks. Solen eller andre stjerner. Eller sende radiosignaler fra rumsonder tilbage til jorden.
Hvis man bevæger sig i denne æter, må man opleve *ætervinden* - ligesom man ved bevægelse i luften oplever luft-vinden. Men kan vi nu *måle*, hvordan denne ætervind "blæser"? Dette blev forsøgt af de to fysikere Michelson og Morley i året 1887.
De ville med deres apparat måle ætervindens hastighed i deres laboratorium - man forestillede sig, at jorden bevægede sig gennem æteren i sin bane om Solen. Jordens hastighed i forhold til æteren - eller æterens hastighed i forhold til jorden - måtte derfor kunne måles i ethvert laboratorium på jorden. På figuren nedenfor ses en forenklet udgave af eksperimentet.

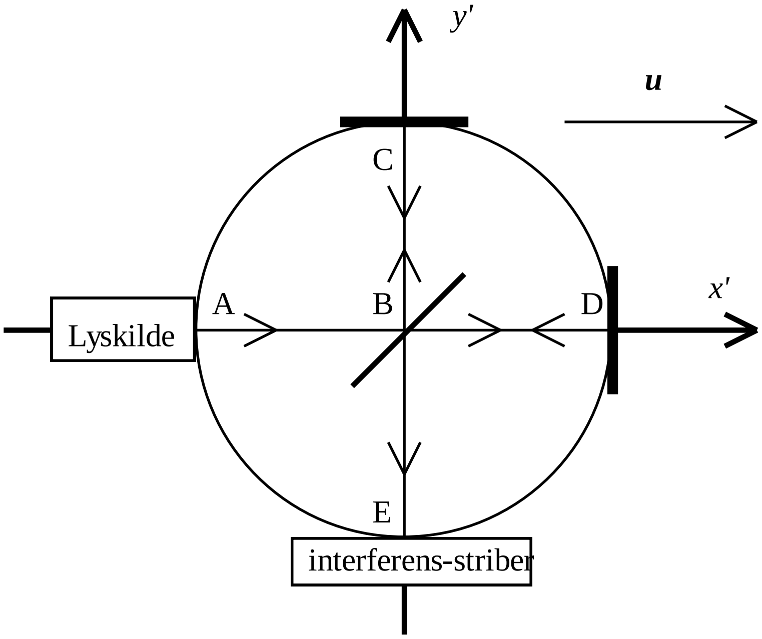


Fig.1 Princippet i Michelson-Morleys interferometer

På figuren angiver ***u*** jordens hastighed i forhold til æteren.
Fra lyskilden sendes en lysstråle mod et halvgennemsigtigt spejl, her splittes strålen op i to, idet en del af strålen spejles i punkt B og bevæger sig mod punkt C, hvor den spejles og bevæger sig gennem spejlet i B til punkt E. Den anden del af strålen går gennem det halv-gennemsigtige spejl og når punkt D, hvor strålen reflekteres, bevæger sig tilbage mod det halvgennemsigtige spejl, hvor en del af strålen spejles for endelig at bevæge sig mod punkt E.
Det er på strækningerne B-C-B og B-D-B der kan opstå forskellige "rejsetider" for de to dele af lysstrålen. I punkt E, hvor de to dele af strålen mødes igen, vil der

opstå interferens-striber. Pointen er nu, at når apparatet drejes 90°, vil lysvejene B-C-B og B-D-B bytte rolle, og forsinkelsen af de to stråler vil skifte fortegn, således at interferens-stregerne ved punkt E under drejningen må flytte sig.
Hvis vi benytter Galileitransformationen for hastigheder (3.8) fra ætersystemet *I* til jordsystemet *I'*, finder vi lysfarten *i jordsystemet* på strækningen BD:

(1.1) BD: $c'_{\mathrm{BD}} = |c-u| = c-u$

Tilsvarende bliver lysfarten i jordsystemet for strækningen DB:

(1.2) DB: $c'_{\mathrm{DB}} = |-c-u| = c+u$

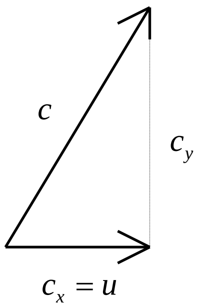


Fig.2 Lysets bevægelse i ætersystemet på strækningen BC.
På strækningen BC finder vi koordinaterne for lysets bevægelse i *ætersystemet*:

$$c_x = u \quad \text{og} \quad c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} \quad - \quad \text{hvoraf} \quad c_y = \sqrt{c^2 - u^2}$$

Her er *c* lysets fart i ætersystemet, c_x og c_y er koordinaterne for lyshastigheden i dette system - se fig.2. Når *x*-koordinaten er lig med *u*, skyldes det, at lyset jo skal følge med jorden i denne retning - set fra ætersystemet. Oversættes disse koordinater til jordsystemet, får vi jordkoordinaterne

$$c'_x = u - u = 0 \quad \text{og} \quad c'_y = c_y = \sqrt{c^2 - u^2}$$

Hermed bliver lysets fart på strækningen BC (og CB!) givet ved

(1.3) BC, CB: $c'_{\mathrm{BC}} = \sqrt{c^2 - u^2}$

Hvis vi regner med, at de to strækninger BC og BD er lige lange, altså

(1.4) $s = |\mathrm{BC}| = |\mathrm{BD}|$

kan vi nu let beregne tidsforskellen på de to lysveje BCB og BDB:

(1.5) $\Delta t = \left(\dfrac{s}{c'_{\mathrm{BD}}} + \dfrac{s}{c'_{\mathrm{DB}}} \right) - \dfrac{2s}{c'_{\mathrm{BC}}} = \left(\dfrac{s}{c-u} + \dfrac{s}{c+u} \right) - \dfrac{2s}{\sqrt{c^2 - u^2}}$

Det kan let vises, at denne tid kan skrives på følgende måde:

(1.6) $$\Delta t = \frac{2s}{c} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2} - \frac{2s}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1^2-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} = \frac{2s}{c} \cdot \left(\frac{1}{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2} - \frac{1}{\sqrt{1^2-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} \right)$$

Det fremgår af (1.6), at $\Delta t > 0$ - såfremt jordens fart i æteren ikke er 0.
Drejes nu apparatet 90°, vil de to lysveje BCB og BDB bytte rolle, og tidsforskellen vil skifte fortegn. Og interferens-striberne mellem de to stråler, der mødes i punkt D, må flytte sig under drejningen.
Nu viste deres eksperiment imidlertid, at interferens-striberne overhovedet ikke flyttede sig ved drejningen!
Der er flere mulige forklaringer på dette mærkelige resultat:

I: Jorden bevæger sig ikke i forhold til æteren

II: Længder forkortes med faktoren $\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}$ i bevægelsesretningen i forhold til æteren

III: Æterteorien er forkert - der er ikke noget "ætersystem"

Øvelse 1 Vis, at forklaring nummer II fører til, at $\Delta t = 0$ uanset hvordan apparatet vender!

Forklaring I blev efterprøvet ved at gentage eksperimentet et halvt år efter - hvor jorden er nået en halv gang rundt om Solen og således må formodes at bevæge sig anderledes i forhold til æteren - men forsøget gav samme resultat. Og det blev anset for usandsynligt, at æteren lige netop skulle følge jordens bane omkring Solen!

Forklaring II blev foreslået af fysikeren H. A. Lorentz i 1892 og -uafhængig heraf - af L. FitzGerald i 1893. Denne kaldes *kontraktionshypotesen* (kontraktion = sammentrækning).
Forklaringen afskaffer ikke æteren, idet jo alle målestokke er længst i ætersystemet og bliver kortere, når de bevæges i længderetningen i ætersystemet. Der er derfor forskel på ætersystemet og alle andre systemer. Der blev meget senere udført eksperimenter, der viste, at æterhypotesen ikke kunne være rigtig - selvom kontraktionshypotesen så ud til at redde den - for en tid.
(Et af disse eksperimenter vedrører Doppler-forskydning af spektral-linier. Denne forskydning måtte forventes at afhænge af både af lyskildens og iagttagerens hastighed i forhold til æteren - men denne afhængighed var ikke tilstede - Ives, 1938)

Forklaring III blev foreslået i 1905 af Albert Einstein.

3 Relativitetsprincippet i Einsteins fysik

1. Einsteins postulater

Einstein fremkom med følgende radikale postulater:

Lys-fartens invarians:

Lysets fart i det tomme rum er den samme i alle inertialsystemer - uanset lysets retning og lyskildes bevægelse.

Relativitetsprincippet:

Alle inertialsystemer er ligeberettigede ved beskrivelse af *alle* fysiske love. Alle naturlove vil derfor have samme matematiske form i ethvert inertialsystem.

Det første postulat løser straks problemet i Michelson og Morleys forsøg: lysets fart i jordsystemet er den samme på alle lysvejene i forsøget, og tidsforskellen er derfor 0 - uanset hvordan apparatet vender.

Andet postulat afskaffer det særlige ætersystem og er en kraftig udvidelse af mekanikkens relativitets-sætning - denne vedrører jo kun mekaniske forsøg - og f.eks. ikke elektromagnetiske fænomener. Einsteins andet postulat hævder, at *ingen* forsøg kan påvise en absolut bevægelse - *alle* bevægelser er relative.

Men det første postulat er klart i modstrid med Galilei-transformationen! Ifølge denne er der *ingen* fart, der er den samme i alle inertialsystemer. Hvis derfor første postulat er rigtig, må hele den Newtonske fysik revideres!

Det skal iøvrigt bemærkes, at Einsteins udgangspunkt for de to postulater *ikke* var Michelson og Morleys forsøg - men derimod de ligninger, der "styrer" elektriske og magnetiske felter, nemlig de såkaldte Maxwell-ligninger. Her lykkedes det Einstein at finde en erstatning for Galilei-transformationen, således at Maxwell-ligningerne antog samme form i alle inertialsystemer, når de "oversattes" fra et inertialsystem til et andet ved hjælp af denne nye transformation. Denne transformation mellem inertialsystemer kaldes idag for Lorentz-transformationen - og vi vil senere beskæftige os med denne. Teorien har som konsekvens - ligesom H. A. Lorentz' teori - at ting, der bevæger sig, bliver kortere i bevægelsesretningen. Men den er absolut ikke identisk med Lorentz' teori, der jo postulerer, at der findes et særligt ætersystem. Ikke desto mindre viser navnet på Einsteins teori (Lorentz-transformationen), at Einstein var inspireret af Lorentz' ideer.
Det skal pointeres, at postulatet om, at lysets fart er den samme bedømt fra ethvert inertialsystem, kan virke mærkelig. Som eksempel ser vi på figur1:

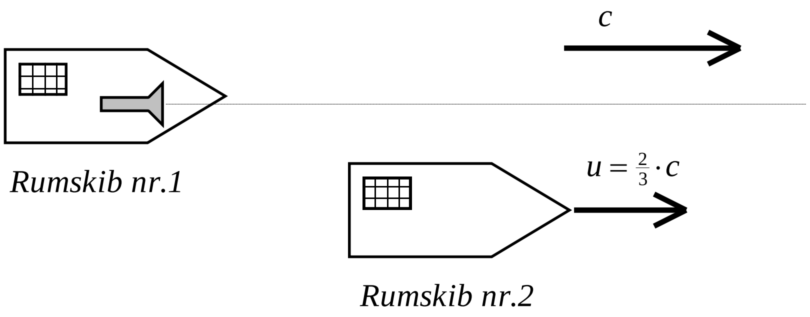


Fig.1 Hvordan bedømmes lysets fart i rumskib 2?

Vi forestiller os, at vi selv befinder os i rumskib nr.1. Ved hjælp af en lommelampe sender vi et lyssignal afsted. Dette signal bevæger sig naturligvis med farten *c* - lysets fart - i forhold til vort eget rumskib. Et andet rumskib passerer vort eget med farten $u = \frac{2}{3} \cdot c$ - igen målt fra vort eget rumskib. Vi stiller nu spørgsmålet: hvilken fart ser iagttagererne i rumskib 2 lyset passere dem? Man ville vel umiddelbart mene, at denne fart måtte være $\frac{1}{3} \cdot c$. Denne formodning er i overensstemmelse med Galilei-transformationen for hastigheder - se (3.9) i kapitel 1. Men her tager vi fejl! Ifølge Einsteins postulat om samme lys-fart i *alle* inertialsystemer er lysets fart *c* - også set fra rumskib 2!

2. Einsteins tog-eksperiment

Einstein illustrerede flere af sine ideer med tanke-eksperimenter. En del af disse vedrørte sporvogne og tog - Einstein boede jo i den Schweiziske by Bern, da han udviklede sine teorier om rum og tid. Vi vil nedenfor benytte et sådant tanke-eksperiment til at illustrere to overraskende konsekvenser af Einsteins postulater.
På figuren nedenfor ses et tog, der bevæger sig på et skinnelegeme - med en fart, der nærmer sig lysets! Vi har placeret to iagttagere - en (i hvile) i toget og en (i hvile) på jorden i nærheden af skinnelegemet.

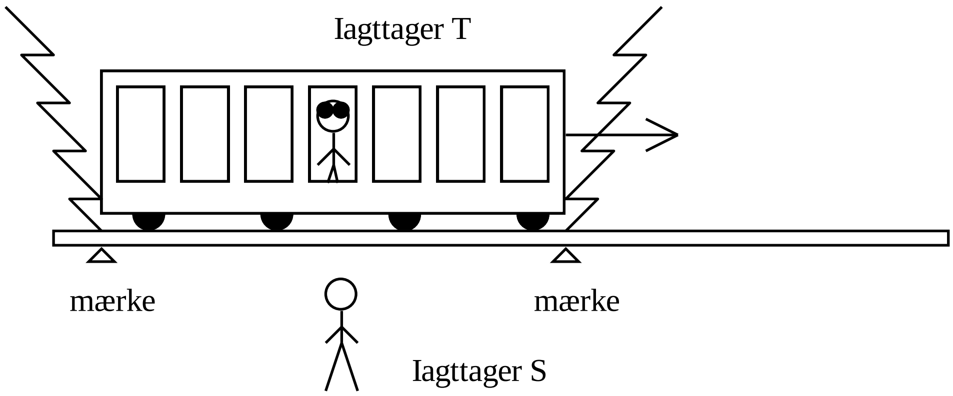


Fig.2 De to iagttagere S og T i togsksperimentet.

På et bestemt tidspunkt - *bedømt af iagttager* S *på skinnelegemet* - slår to lyn ned i hver sin ende af toget og efterlader sig et mærke på skinnerne. Iagttageren S er placeret i samme afstand fra begge disse mærker, og vil derfor modtage lys-signalerne fra de to nedslag *nøjagtig samtidigt*.
Lysglimtene bruger samme tid til at nå denne iagttager. Men vi skal nu se, at iagttageren T - *selvom denne er placeret midt i toget* - ikke vil modtage de to lysglimt samtidigt! Derfor vil iagttageren T påstå, at de to lyn ikke slog ned i toget på samme tid - hvis de jo gjorde det, ville T jo modtage de to lysglimt samtidig, da der er lige langt til begge togets ender, og lyset udbreder sig med samme fart i begge retninger - *også set fra toget*.
Men hvordan kan vi nu indse, at iagttageren T ikke modtager de to lysglimt samtidig?

Vi følger først situationen som iagttageren S ser den:
Straks efter de to samtidige lyn-nedslag begynder lysglimtet fra nedslagene at bevæge sig mod begge iagttagere. Iagttageren på toget T er - også set fra S - placeret midt i toget - og dermed også præcis midt mellem de to mærker på skinnerne på tidspunktet for nedslagene. Men mens de to lys-signaler bevæger sig mod T, flytter T sig mod højre. Derfor - set fra S - vil T modtage lyssignalet fra højre ende først - og lidt senere lyssignalet fra venstre. *Dette vil også gælde set fra iagttageren T!* F.eks. kan man forestille sig - set fra S - at T begunder at drikke en sodavand, når lyssignalet fra højre modtages - og at T lige når at drikke denne inden lyssignalet fra venstre nedslag modtages af T. Dette *begivenhedsforløb* er naturligvis også foregået i toget bedømt af T!
Følg T's modtagelse af de to lys-signaler (som det ses fra iagttageren S) på tegneserien nedenfor!

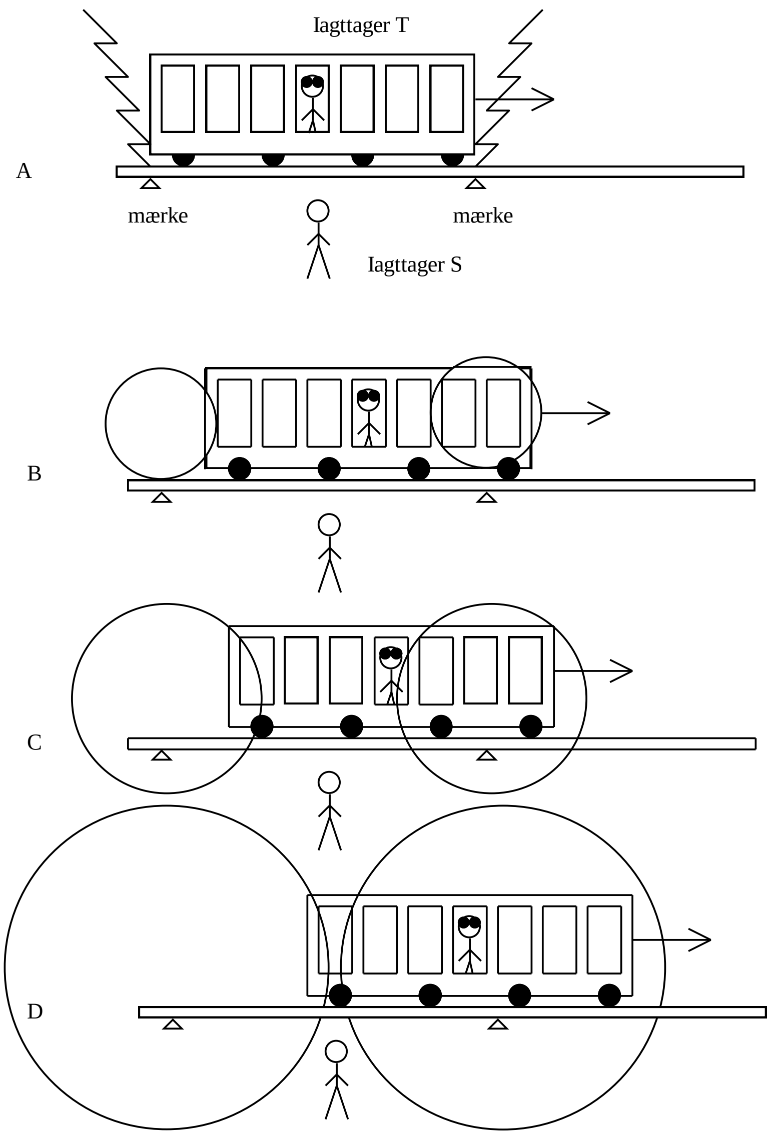


Fig.3 De to lyssignaler bevæger sig mod de to iagttagere. Iagttager T modtager lyssignalet fra højre ende af toget først.

På øjebliksbillede A ser vi de to samtidige lyn-nedslag - bedømt af S. På øjebliksbillede C modtager iagttager T signalet fra forenden af toget - men iagttageren S her endnu ikke set noget lysglimt. På øjebliksbillede D er vi tæt på, at iagttageren S modtager begge lyssignaler. Lidt senere vil iagttageren T modtage lyssignalet fra togets bagende.

Vi må altså konstatere, at to begivenheder, der er samtidige i et system (de to lynnedslag, der - bedømt af en iagttager S - er samtidige) - *ikke* vil ske på samme tid, når de ses fra en anden iagttager, der bevæger sig i den retning, hvori den rumlige adskillelse af de to begivenheder forekommer. (Læs lige den sætning igen!).
Begrebet *samtidighed* afhænger altså af, hvilket beskrivelsessystem, der anvendes! Udtrykt på en anden måde: samtidighed er *relativ*.

Vi vil nu vende os mod bedømmelsen af togets *længde*:
Iagttageren S kan måle togets længde som afstanden mellem de to mærker, de to lynnedslag har afsat på skinnelegemet. Men er T enig i dette? Svaret er nej. Iagttageren T modtager lysglimtet fra

togets for-ende først. Mærket til højre på skinnelegemet er altså afsat først - *set fra toget!*. Dernæst kører toget et stykke *ud over det højre mærke*, inden lysglimtet fra venstre lynnedslag modtages af T. Og da tids*forsinkelsen* fra nedslag til modtagelse af lysglimt er den samme for begge nedslag (T er placeret midt i taget!), vil T mene, at afstanden mellem de to mærker på skinnerne er *kortere* end togets længde *målt med målestokke i selve toget*.
Iagttageren T, der er i hvile *i forhold til toget*, måler en toglængde, der er *længere* end toglængden målt af den anden iagttager S, der er i bevægelse *i forhold til toget*.
Læg mærke til, at uenigheden om længdemålingen skyldes, at de to iagttagere er uenige om *samtidigheden* af de to lynnedslag. Og det skyldes igen, at de to lynnedsleg er rumligt adskildt i *togets bevægelsesretning.* Længder *på tværs* af togets bevægelsesretning vil de to iagttagere derimod være enige om!

3. Stavuret

Vi vil i dette afsnit introducere en særlig urtype, hvor urets gang er styret af lysets bevægelse. Det sætter os nemlig i stand til at beregne, hvordan bevægelse vil påvirke urets gang - når vi anvender Einsteins påstand om lysfartens invarians.
Hvis man tager to (gode) ure af forskellig fabrikat og virkemåde, og anbringer dem samme sted, kan de justeres til at "gå ens". En iagttager, der bevæger sig i forhold til disse to ure, vil da naturligvis også finde, at de to ure på ethvert tidspunkt viser det samme. Urets særlige virkemåde (altså den måde, uret fungerer på) kan altså ikke være afgørende tidsmålingen. Vi kan selv vælge det princip, der styrer urets gang.
I det følgende vil vi anvende en urtype, der er baseret på lysets bevægelse - er såkaldt **stavur**. Uret består af en lyskilde og et spejl, og disse er anbragt i hver sin ende af en stav (se figur 4 nedenfor)

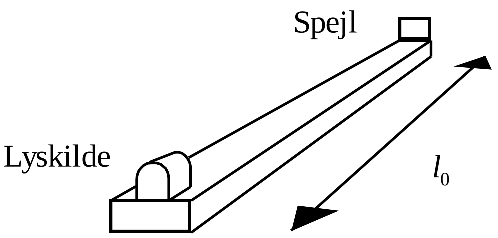


Fig.4 Stavuret bestående af stang, lysgiver og spejl

Princippet i uret er følgende: et lysglimt udsendes af lysgiveren, rammer spejlet i den fjerne ende og vender tilbage tillyskilden. Her kan den så f.eks. registreres af en fotocelle, som bevirker, at uret bevæger sig en tand frem. Samtidig udsendes et nyt lysglimt osv. Da lyset udbreder med konstant fart i det tomme rum, vil tidsintervallet mellem to på hinanden følgende lysglimt være konstant.
Hvis afstanden mellem lyskilde og spejl kaldes l_0, vil længden af dette tidsinterval - bedømt af en iagttager i hvile i forhold til uret - være givet ved

(3.1) $$\Delta t_0 = \frac{2 \cdot l_0}{c}$$

Her er c lysets fart i det tomme rum.

Størrelsen l_0 kaldes stangens *hvilelængde*, og Δt_0 kaldes *egentiden* for ur-processen - altså den tid, lysets bevægelse fra lyskilde til spejl og tilbage varer, *når uret er i hvile i forhold til iagttageren* .

4. Tidsbegrebets relativitet

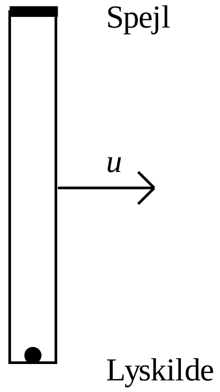


Fig.5 Stavuret bevæger sig på tværs af sin længderetning

Vi lader nu stavuret bevæge sig *vinkelret* på urets længderetning med den konstante fart *u*. Se fig.5.
Som vi indså under analysen af Einsteins togeksperiment, vil stangens længde være upåvirket af stangens bevægelse, når stangen bevæger sig *på tværs* af sin længderetning. Stangens længde er altså l_0 uafhængig af stangens bevægelse.
Lysets bane er imidlertid ikke den samme som da stavuret var i hvile, idet jo spejl og lyskilde bevæger samtidig med, at lyset bevæger sig. Lysets bane er vist på figur 6 nedenfor.

Den tid, som lyset er om at bevæge sig fra lysgiveren til spejlet og tilbage, kaldes Δt . Længden af dette tidsrum bestemmer, hvor hurtigt stavuret "går".
Det er allerede på forhånd klart, at lyset skal bevæge sig længere end da uret var i hvile. Og da lysets fart er den samme, vil uret altså gå langsommere (bedømt af os, der ser uret bevæge sig).
For at finde en formel for, hvor meget langsommere, uret går, når det er i bevægelse, ser vi igen på figuren. Af denne fremgår det (sammen med anvendelsen af Pytagoras' sætning), at

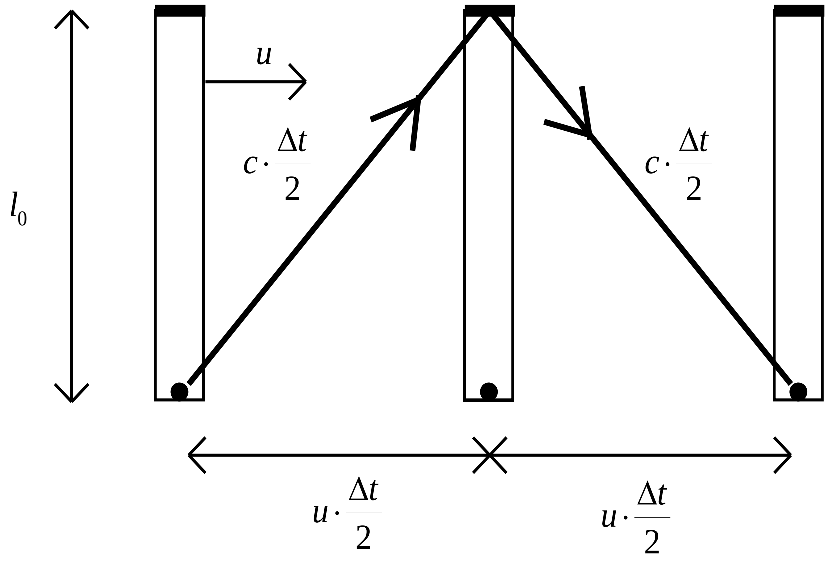


Fig.6 Lysets bane i stavuret, når der er i bevægelse

$$\left(c \cdot \tfrac{\Delta t}{2}\right)^2 = \left(v \cdot \tfrac{\Delta t}{2}\right)^2 + l_0^2$$

Vi finder heraf:

$$\Delta t = \frac{2 \cdot l_0}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

Sammenholder vi dette med (3.1), får vi tidsforlængelses-formlen:

(4.1) $$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

tids-forlængelsesformlen

Uret vil altså gå langsommere, når det er i bevægelse - sammenlignet med et ur, der er i hvile - og ligning (4.1) giver sammenhængen mellem de to ures visning.
Vi kan f.eks. forestille os, at vi slynger et ur rundt i en jævn cirkelbevægelse. Dette ur vil altså gå langsommere en et tilsvarende ur i hvile (hvis vi forudsætter, at urets acceleration ikke påvirker urets gang).
Formel (4.1) er eftervist ved hjælp af ustabile elementarpartikler, der cirkulerer i en lufttom ring. På grund af partiklernes store fart (tæt på lysets fart), vil partiklernes levetid blive forøget mange gange i forhold til levetiden, når partiklerne er i hvile i laboratoriet.

5. Længdebegrebets relativitet

Vi skal nu se, at også længder ændres ved bevægelse - og denne længde*forkortelse* finder kun sted i bevægelsesretningen (som vi argumenterede for ved Einsteins togeksperiment).
For at finde en formel for længdeforkortelsen, vender vi nu stavuret, så uret nu bevæger sig med farten u - men nu i stavurets *længderetning*. Se figuren nedenfor.

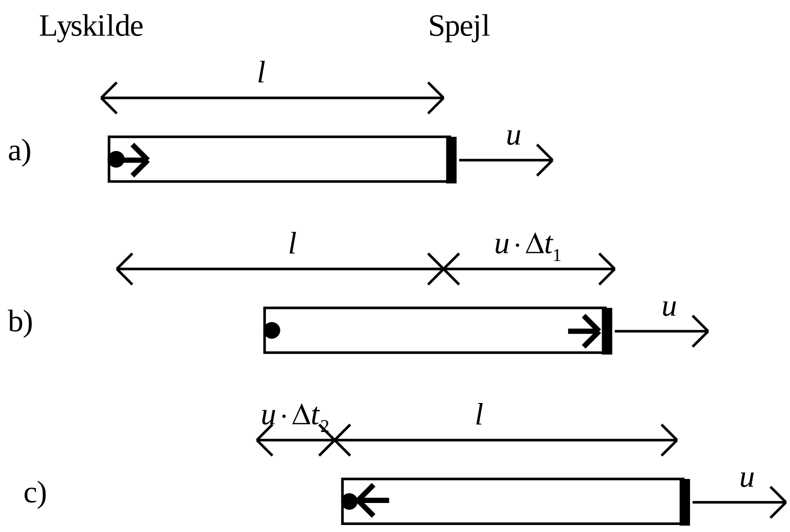


Fig.7 Stavuret bevæger sig i sin længderetning

Forklaring til figuren til venstre:
Til tidspunktet markeret a) udsendes et lysglimt fra lyskilden. Efter tidsrummet Δt_1 når dette lysglimt spejlet - der i mellemtiden har bevæget sig stykket $u \cdot \Delta t_1$. Efter spejlingen bevæger lysglimtet sig tilbage mod lyskilden, og tidsrummet fra lyset forlader spejlet til lyskilden nås, kaldes Δt_2. I dette tidsrum har uret bevæget sig stykket $u \cdot \Delta t_2$ frem.
Stangens længde kaldes *l*.

Vi kan nu opstille følgende ligninger til bestemmelse af Δt_1 og Δt_2 :

(5.1) $$c \cdot \Delta t_1 = l + u \cdot \Delta t_1 \qquad \text{hvoraf} \qquad \Delta t_1 = \frac{l}{c-u}$$

Lyset har jo bevæget sig stangens længde plus det stykke, som spejlet har flyttet sig i samme tid.

(5.2) $$c \cdot \Delta t_2 = l - u \cdot \Delta t_2 \qquad \text{hvoraf} \qquad \Delta t_2 = \frac{l}{c+u}$$

Lyset skal jo ikke bevæge sig hele stangens længde *l* for at nå tilbage til lyskilden, da lyskilden kommer lyset i møde.
Vi beregner nu den samlede tid, som lysglimtet er om at bevæge sig fra lyskilde til spejl og tilbage igen:

(5.3) $$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{l}{c-u} + \frac{l}{c+u} = \frac{2 \cdot l \cdot c}{c^2 - u^2} = \frac{2 \cdot l}{c} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}$$

Er stangen i hvile, er varigheden af ovenstående proces givet ved

(5.4) $$\Delta t_0 = \frac{2 \cdot l_0}{c}$$

Sammenhængen mellem Δt og Δt_0 har vi fundet tidligere:

(5.5) $$\Delta t = \Delta t_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

Heraf får vi - når vi indsætter (5.3) og (5.4) i (5.5):

$$\frac{2 \cdot l}{c} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2} = \frac{2 \cdot l_0}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

Heraf fås let:

(5.6) $$l = l_0 \cdot \sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}$$ **længde-kontraktionsformlen**

Når altså en stang bevæger sig i sin længderetning, bliver den kortere end den var, da den var i hvile - bedømt af en, der ser stangen bevæge sig.

Eksempel - muonens henfald

Hvis en muon (en ustabil elementarpartikel) er i hvile i laboratoriet, har den en gennemsnitlig levetid på $2{,}2 \cdot 10^{-6}$ sekunder.
Muoner dannes i atmosfærens øverste lagsom følge af, at en meget hurtig partikel fra rummet rammer en atomkerne i et luftmolekyle. Hvis muonens levetid ikke ændredes som følge af dennes bevægelse, ville muonerne i gennemsnit *højst* nå vejstrækningen $\Delta s = c \cdot \Delta t_0 = 3{,}00 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s} \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s} = 660\,\mathrm{m}$. Derfor ville vi ikke kunne "se" disse partikler i laboratorier ved jordens overflade, da de dannes i en højde af mindst 10 km. Ikke desto mindre måles tilstedeværelsen af disse partikler ved jordens overflade!
Men hvordan ser det ud fra en iagttager, der følger muonen i sin bevægelse ned gennem atmosfæren?
Denne iagttager er i hvile i forhold til muonen, og muonens levetid er derfor $2{,}2 \cdot 10^{-6}$ sekunder. Hvordan kan den så nå gennem atmosfæren på denne korte tid? Svaret er, at *atmosfæren* bevæger sig meget hurtigt forbi muonen, derfor vil atmosfærens tykkelse være stærkt forkortet ifølge formlen (5.6). Derfor kan muonen nå det!

Øvelse 2 En muon dannes i 10 km's højde og bevæger sig med 99,9% af lysets fart direkte mod jordoverfladen.
a) Hvad er muonens levetid - set fra en iagttager i hvile på jorden? Kan den nå at ramme jorden?
b) Beregn atmosfærens tykkelse - som den ser ud fra muonens hvilesystem. Kan atmosfæren nå at passere muonen i dennes levetid?

6. Tidsmåling og synkronisering af ure

Da vi nu ved, hvordan bevægelse påvirker ures gang, kan vi også mere præcist fastlægge, hvordan vi kan måle *tidsforskellen* mellem to fysiske begivenheder, der finder sted i to forskellige punkter i rummet.
Vi er naturligvis nødt til at sikre os, at de to ure - anbragt i hvile i de to forskellige punkter - er synkroniserede, dvs. viser samme tid på samme tidspunkt.
Vi kan imidlertid ikke bare anbringe de to ure ved siden af hinanden, synkronisere deres gang, og derefter flytte dem til de to omtalte punkter, idet vi jo allerede har set, at et urs bevægelse påvirker urets gang - og vi kan derfor ikke være sikre på, at urene også er synkroniserede efter at de er anbragt i de to punkter.
Derimod kan vi f.eks. anbringe et ur i koordinatsystemets begyndelsespunkt og derefter synkronisere ure i andre punkter med dette på følgende måde:

Når uret i begyndelsespunktet viser 0, udsendes en lysbølge (kuglebølge) fra dette punkt. Et ur, der er anbragt i afstanden l fra begyndelsespunktet, indstilles *på forhånd* til at vise tiden l/c - dvs den tid, lyset er om at bevæge sig fra begyndelsespunktet til det omtalte punkt. Ved lyssignalets ankomst startes uret. Herefter vil (efterhånden) alle ure være synkroniserede.
Tidsforskellen mellem to begivenheder i to forskellige punkter er så naturligvis forskellen på visningen af de to ure (der er anbragt i de to punkter) aflæst, når de to begivenheder finder sted.
Specielt siges to begivenheder at være samtidige, når de to ure viser det samme, når de to begivenheder finder sted.

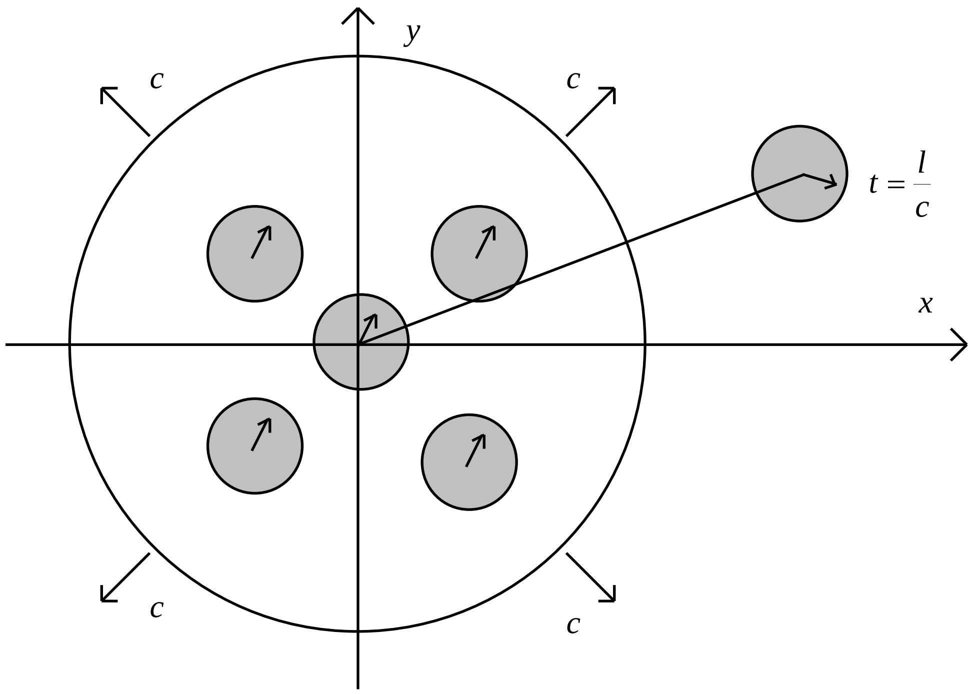


Fig.8 Synkronisering af ure med lyssignal

7. Lorentztransformationen

Vi kan nu opstille de "oversættelses-ligninger", der skal erstatte Galilei-transformationen. Vi begynder med at se på en begivenhed, der finder sted i punktet P med de rumlige koordinater (x, y, z) til tidspunktet t - som ser fra et inertialsystem I. Vi siger, at begivenheden har *rum-tids-*

koordinaterne (x, y, z, t). Den *samme* begivenhed vil naturligvis have andre koordinater (x', y', z', t') bedømt fra et andet inertialsystem *I'*. Hvordan er nu sammenhængen mellem de to sæt koordinater?
Ligesom ved Galilei-transformationen vælger vi koordinatsystemerne sådan, at *x*-akserne begge peger i retning af den relative hastighed ***u*** af systemet *I'* i forhold til *I*. Se figuren nedenfor.

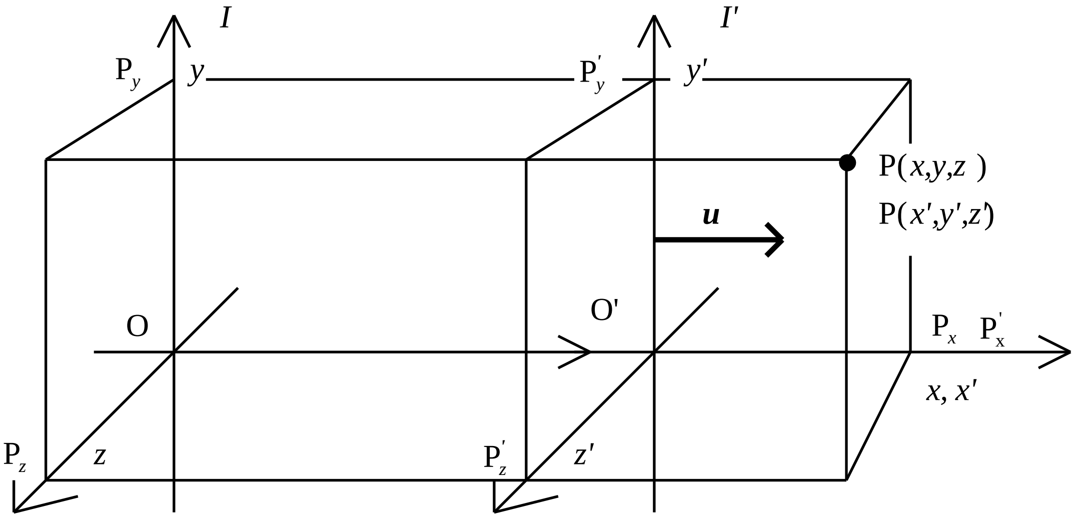


*Fig.9 De to inertialsystemer I og I' er akse-parallelle, og I' bevæger sig med hastigheden **u** parallelt med x-aksen i I.*

Vi vil i det følgende antage, at urene i *I* og *I'* er justerede således,at uret i O og uret i O' viser 0 på det tidspunkt, hvor de to ure passerer hinanden. De øvrige ure er synkroniserede med uret i origo på den måde, ser blev omtalt i det forrige afsnit. Dette gælder i begge systemer.
Som tidligere nævnt vil en stang, der bevæger sig vilkelret på sin længderetning, have samme længde som hvis den var i hvile. Derfor får vi

$$|O'P_y'| = |OP_y| \quad \text{og} \quad |O'P_z'| = |OP_z|$$

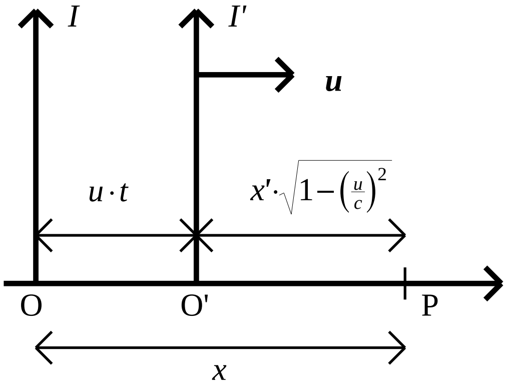
Heraf slutter vi, at

Lorentz-transformation af *y* og *z*:

(7.1) $$y' = y \qquad \text{og} \qquad z' = z$$

Tænker vi os for enkelthedens skyld, at begivenheden finder sted på *x*-aksen, vil følgende ligning have gyldighed i *begge* koordinatsystemer:

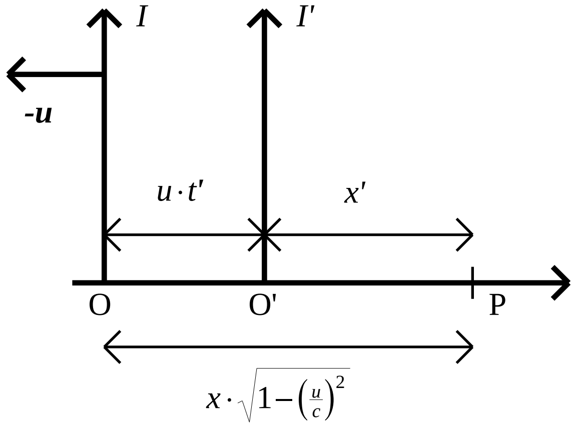
(7.2) $$|OP| = |OO'| + |O'P|$$



Ligning (7.2) giver, set fra systemet *I* (se figur til venstre):

(7.3) $$x = u \cdot t + x' \cdot \sqrt{1-\left(\tfrac{u}{c}\right)^2}$$

idet jo stykket x' vil være Lorentz-forkortet - set fra *I*.



Set fra systemet *I'* får vi følgende ligning (se figur til venstre):

(7.4) $$x \cdot \sqrt{1-\left(\tfrac{u}{c}\right)^2} = u \cdot t' + x'$$

idet jo stykket *x* vil være Lorentz-forkortet (set fra *I'*)

De to ligninger (7.3) og (7.4) kan betragtes som to ligninger med to ubekendte - de ubekendte kan enten være x' og t' eller x og t. Løses de to ligninger m.h.t. disse variable, fås

Lorentz-transformation af *x* og *t*:

(7.5) $$x' = \frac{x - u \cdot t}{\sqrt{1-\left(\tfrac{u}{c}\right)^2}} \qquad t' = \frac{t - x \cdot u/c^2}{\sqrt{1-\left(\tfrac{u}{c}\right)^2}}$$

(7.6) $$x = \frac{x' + u \cdot t'}{\sqrt{1-\left(\tfrac{u}{c}\right)^2}} \qquad t = \frac{t' + x' \cdot u/c^2}{\sqrt{1-\left(\tfrac{u}{c}\right)^2}}$$

Det ses, at ligningerne for *x* og *t* kan fås udfra ligningerne for x' og t' ved at bytte om på mærkede og umærkede variable - og erstatte *u* med *–u*. Dette er ikke overraskende, da de to systemer er ligeberettigede ved beskrivelses af begivenheden, og da systemet *I* bevæger sig med hastigheden –***u*** i forhold til systemet *I'*.

Øvelse 3 Vis, hvordan formlerne (7.5) og (7.6) fremkommer udfra (7.3) og (7.4)!

Formlerne (7.1) og (7.5), (7.6) , der giver sammenhængen mellem rum-tidskoordinaterne for en og samme begivenhed set fra to forskellige koordinatsystemer, kaldes *Lorentz-transformationen*.

8. Hastighedstransformationen

I det følgende vil vi benytte forkortelsen gamma for følgende funktion

(8.1) $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

Hvis det ikke klart af sammenhængen fremgår, hvilken fart, der indgår i denne gamma-faktor, skrives f.eks. $\gamma(u)$.

Vi vil først analysere bevægelsen af en partikel, hvis bevægelse - set fra systemet *I* - inden for et kort tidsrum Δt er beskrevet ved følgende koordinat-tilvækster:

(8.2) $$\begin{aligned} \Delta x &= v_x \cdot \Delta t \\ \Delta y &= v_y \cdot \Delta t \\ \Delta z &= v_z \cdot \Delta t \end{aligned}$$

hvor (v_x, v_y, v_z) er partiklens hastighedskoordinater i systemet *I*.

Ved hjælp af Lorentz-transformationen vil vi nu finde partiklens hastighedskoordinater (v_x', v_y', v_z') som de måles fra et andet inertialsystem *I'*, der bevæger sig med hastigheden ***u*** i forhold til systemet *I*.

Af ligningerne (7.5) og (7.6) ser vi, at

Til tiden *t*: $x' = \gamma \cdot (x - u \cdot t)$ og $t' = \gamma \cdot (t - x \cdot u/c^2)$

Til $t + \Delta t$: $x' + \Delta x' = \gamma \cdot (x + \Delta x - u \cdot (t + \Delta t))$ og $t' + \Delta t' = \gamma \cdot (t + \Delta t - (x + \Delta x) \cdot u/c^2)$

Ved at trække disse ligninger fra hinanden, fås:

$$\Delta x' = \gamma \cdot (\Delta x - u \cdot \Delta t) \quad \text{og} \quad \Delta t' = \gamma \cdot (\Delta t - \Delta x \cdot u/c^2)$$

Indsættes udtrykket $\Delta x = v_x \cdot \Delta t$ i disse to udtryk, giver de

$$\Delta x' = \gamma \cdot (v_x - u) \cdot \Delta t \quad \text{og} \quad \Delta t' = \gamma \cdot (1 - v_x \cdot u/c^2) \cdot \Delta t$$

Set fra systemet *I'* er partiklens *x*-koordinat for hastigheden:

$$v_x' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{v_x - u}{1 - v_x \cdot u/c^2}$$

Ved hjælp af ligning (7.1) får vi sammenhængen mellem tilvæksterne i de andre koordinater:

$$\Delta y' = \Delta y \qquad \text{og} \qquad \Delta z' = \Delta z$$

Bruger vi så det allerede fundne udtryk for $\Delta t'$, får vi

$$v_y' = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\gamma \cdot \left(1 - v_x \cdot u/c^2\right) \cdot \Delta t} = \frac{v_y}{\gamma \cdot \left(1 - v_x \cdot u/c^2\right)}$$

og tilsvarende

$$v_z' = \frac{\Delta z'}{\Delta t'} = \frac{\Delta z}{\gamma \cdot \left(1 - v_x \cdot u/c^2\right) \cdot \Delta t} = \frac{v_z}{\gamma \cdot \left(1 - v_x \cdot u/c^2\right)}$$

Ligningerne, der udtrykker transformationen fra *I'* til *I* (altså den modsatte vej af ovenstående), kan fås af ligningerne for v_x', v_y' og v_z' ved at ombytte mærkede og umærkede variable og erstatte *u* med –*u*.
Altså bliver ligningerne for hastigheds-transformationen

(8.3) $$v_x' = \frac{v_x - u}{1 - v_x \cdot u/c^2} \qquad v_x = \frac{v_x' + u}{1 + v_x' \cdot u/c^2}$$

(8.4) $$v_y' = \frac{v_y}{\gamma \cdot \left(1 - v_x \cdot u/c^2\right)} \qquad v_y = \frac{v_y'}{\gamma \cdot \left(1 + v_x' \cdot u/c^2\right)}$$

(8.5) $$v_z' = \frac{v_z}{\gamma \cdot \left(1 - v_x \cdot u/c^2\right)} \qquad v_z = \frac{v_z'}{\gamma \cdot \left(1 + v_x' \cdot u/c^2\right)}$$

Eks. 1 Antag, at vi med en lommelampe, der er i hvile i *I'*, sender et lyssignal afsted i retning af *x'*-aksen. Så er naturligvis $v_x' = c$. Vi bruger nu ligning (8.3) til at finde lyssignalets hastighed i systemet *I*:

$$v_x = \frac{c + u}{1 + c \cdot u/c^2} = \frac{c \cdot \left(1 + \frac{u}{c}\right)}{1 + \frac{u}{c}} = c$$

Lyssignalets hastighed i systemet *I* er altså også *c*! - i overensstemmelse med Einsteins postulat om lysfartens invarians.

Eks. 2 Antag, at et tog kører med farten $u = \frac{3}{4} \cdot c$, og at en kondiløber ovenpå toget løber med farten $v_x' = \frac{3}{4} \cdot c$. Kondiløberens fart i forhold til banelegemet er da

$$v_x = \frac{\frac{3}{4}c + \frac{3}{4}c}{1 + \frac{3}{4}c \cdot \frac{3}{4}c / c^2} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}} \cdot c = \frac{24}{25} \cdot c$$

Kondiløberen løber altså ikke hurtigere end lyset - heller ikke set fra banelegemet!

9. Egenacceleration - hyperbolsk bevægelse

(Læseren advares om, at der i dette afsnit benyttes differential- og integralregning!)

Ved hjælp af hastighedstransformationsligningerne fra sidste afsnit kunne vi nu udlede en generel transformationsligning for acceleration. Vi vil dog her nøjes med at undersøge en bevægelse, der er accelereret i retning af den relative bevægelse af de to systemer - dvs. i *x*-aksens retning. (Og vi sætter $v_x = v$, $v_x' = v'$)

Vi vil arbejde med begrebet *øjeblikkeligt hvilesystem I'*- det inertialsystem, der på et bestemt tidspunkt har samme hastighed som partiklen, der er placeret i dette systems begyndelsespunkt. Dette system skiftes hele tiden ud med et nyt, der på dette senere tidspunkt har samme hastighed som partiklen.

I systemet *I* har partiklen til tidspunktet *t* hastigheden *v* og accelerationen *a*. I et kort tidsrum Δt efter dette tidspunkt kan tilvæksten i *x*-koordinaten skrives

(9.1) $$\Delta x = v \cdot \Delta t + \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot (\Delta t)^2$$

Her er *accelerationsbidraget* givet ved

(9.2) $$\Delta x_{\text{acc}} = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot (\Delta t)^2, \qquad \text{hvoraf} \qquad a = \frac{2 \cdot \Delta x_{\text{acc}}}{(\Delta t)^2}$$

I det øjeblikkelige hvilesystem *I'* til tidspunktet *t'* (svarende til tidspunktet *t* i *I*) er partiklen i hvile. Men lidt senere, til tidspunktet $t' + \Delta t'$, er partiklen på grund af accelerationen ikke længere i hvile i dette (tidligere) hvilesystem.

Tilvæksten i *x'*-koordinaten er givet ved accelerationsbidraget

(9.3) $$\Delta x' = \tfrac{1}{2} \cdot a_0 \cdot (\Delta t')^2 \qquad \text{hvoraf} \qquad a_0 = \frac{2 \cdot \Delta x'}{(\Delta t')^2}$$

Her er a_0 den såkaldte *egenacceleration* - den acceleration, partiklen selv "føler" sig udsat for. Men Δx_{acc} er Lorentz-forkortet i forhold til $\Delta x'$, og Δt er Lorentz-*forlænget* i forhold til $\Delta t'$:

(9.3) $$\Delta x_{\text{acc}} = \gamma^{-1}(v) \cdot \Delta x' \qquad \text{og} \qquad \Delta t = \gamma(v) \cdot \Delta t'$$

Disse udtryk indsættes i (9.2):

(9.4) $$a = \frac{2 \cdot \Delta x_{\text{acc}}}{(\Delta t)^2} = \frac{2 \cdot \gamma^{-1}(v) \cdot \Delta x'}{(\gamma(v) \cdot \Delta t')^2} = \gamma^{-3}(v) \cdot \frac{2 \cdot \Delta x'}{(\Delta t')^2}$$

Sammenlignes med (9.3), finder vi

(9.5) $$a = \gamma^{-3}(v) \cdot a_0$$

Accelerationen i systemet *I* er derfor *mindre* end accelerationen i partiklens øjeblikkelige hvilesystem.
Af definitionen på acceleration får vi af (9.5)

(9.6) $$\frac{dv}{dt} = \gamma^{-3}(v) \cdot a_0$$

Heraf fremkommer:

(9.7) $$\gamma(v)^3 \cdot dv = a_0 \cdot dt$$

Hvis vi nu forudsætter, at *egenaccelerationen er konstant*, findes ved integration af (9.7):

(9.8) $$\gamma(v) \cdot v = a_0 \cdot t \qquad \text{eller} \qquad \frac{v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = a_0 \cdot t$$

Her har vi forudsat, at begyndelseshastigheden er 0.
Isoleres *v* af denne ligning, er resultatet:

(9.9) $$v = \frac{a_0 \cdot t}{\sqrt{1+\left(\frac{a_0 \cdot t}{c}\right)^2}} = c \cdot \frac{\frac{a_0 \cdot t}{c}}{\sqrt{1+\left(\frac{a_0 \cdot t}{c}\right)^2}}$$

Det fremgår af det sidste udtryk, at denne hastighed nærmer sig lysets hastighed for *t* gående mod uendelig. Men *v* vil *aldrig nå* op på lyshastigheden *c*! Se (*t*,*v*)-grafen nedenfor.
Hvis vi yderligere integrerer ligning (9.9), idet vi jo har, at $v = dx/dt$, kan vil finde *x*:

(9.10) $$x = \int_0^t v \cdot dt = \int_0^t \frac{a_0 \cdot t \cdot dt}{\sqrt{1+\left(\frac{a_0 \cdot t}{c}\right)^2}} = \frac{c^2}{a_0} \cdot \left(\sqrt{1+\left(\frac{a_0 \cdot t}{c}\right)^2} - 1 \right)$$

Her er det forudsat, at begyndelses-stedet er $x_0 = 0$.
Ligningen for *x* som funktion af *t* er ligningen for en hyperbel, idet en lille omskrivning af (9.10) giver

(9.11) $$\left(x + \frac{c^2}{a_0}\right)^2 - (c \cdot t)^2 = \left(\frac{c^2}{a_0}\right)^2$$ **Hyperbolsk bevægelse**

- og dette er jo netop ligningen for en hyperbel.

For store værdier af t gælder ifølge (9.10)

(9.12) $$x = c \cdot t - \frac{c^2}{a_0}$$

som er ligningen for hyperblens asymptote - se (t,x) - grafen nedenfor.
Vi ser heraf, at hvis en lysstråle sendes afsted efter den accelerede partikel *senere* end tidspunktet $t = c/a_0$, vil lyset aldrig nå partiklen! Hvis der er tale om et rumskib, der accelereres, vil et radio-signal, der sendes afsted efter dette tidsrum, aldrig nå frem til rumskibet!

For små værdier af t får vi de velkendte formler:

(9.13) $v = a_0 \cdot t$ og $x = \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot t^2$

Øvelse 4 Vis dette!

Øvelse 5 Vis, at de to integraler i dette afsnit er korrekte!

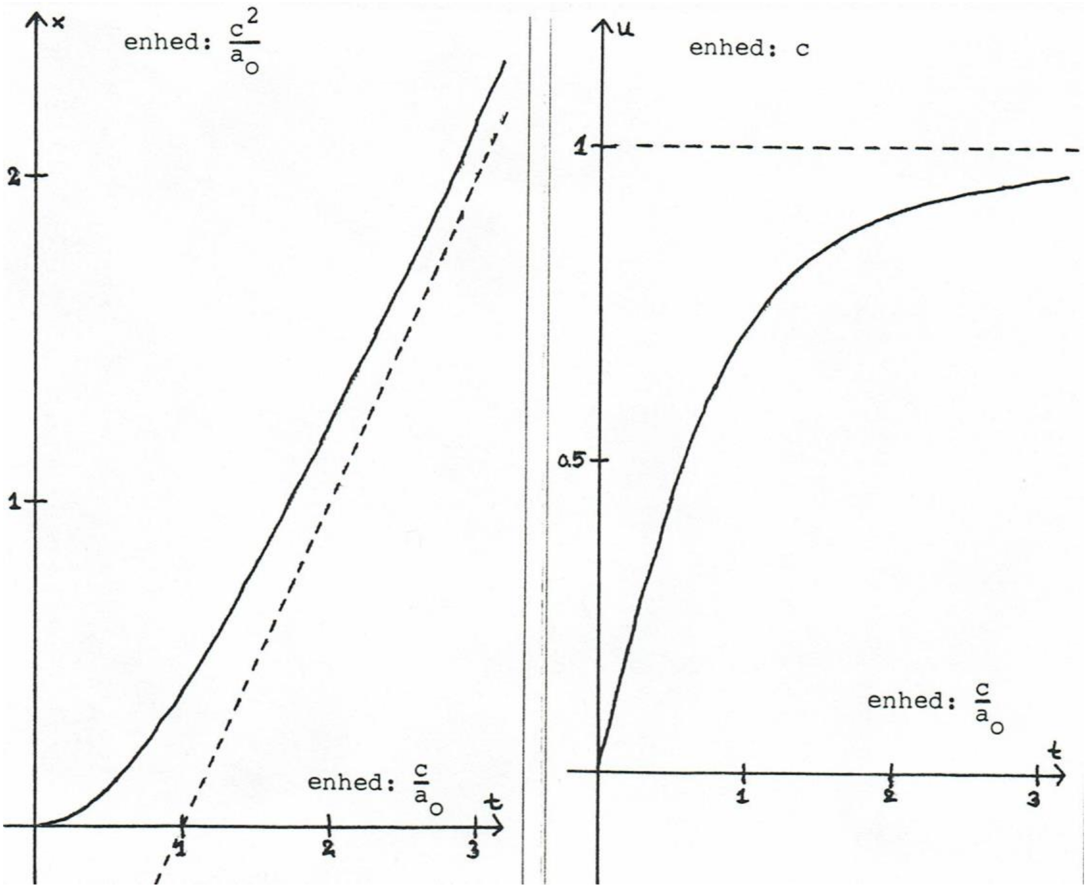


Fig. 10 Stedfunktion og hastighedsfunktion for den hyperbolske bevægelse

Egentiden for den hyperbolske bevægelse kan findes fra ligning (4.1):

(9.14) $$dt_0 = dt \cdot \sqrt{1-\left(\tfrac{v}{c}\right)^2}$$

Udtrykket for *v* (9.9) indsættes heri:

(9.15) $$dt_0 = \frac{dt}{\sqrt{1+\left(\frac{a_0 \cdot t}{c}\right)^2}}$$

som integreret giver

(9.16) $$t_0 = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+\left(\frac{a_0 \cdot t}{c}\right)^2}} = \frac{c^2}{a_0} \cdot ln\left(\frac{a_0 \cdot t}{c} + \sqrt{1+\left(\frac{a_0 \cdot t}{c}\right)^2}\right)$$

Øvelse 6 Vis, at udtrykket for t_0 er korrekt - eventuelt ved at differentiere!

Øvelse 7 Nogle astronauter vil besøge et fjerntliggende solsystem 100 lysår borte fra jorden. Den første halvdel af turen sker med den konstante egenacceleration $10\,\mathrm{m/s^2}$, den sidste halvdel med egenaccelerationen $-10\,\mathrm{m/s^2}$ (nedbremsningen).
Hvor lang tid varer turen set fra jorden?
Hvor lang tid varer turen - målt på en astronauts ur?

4 Relativistisk dynamik

1. Indledning - Newtons love

Vi vil i dette kapitel undersøge, hvordan Newtons fysik må ændres for at passe ind i relativitetsteorien. Vi begynder derfor med at formulere Newtons love igen:

N1:	$\boldsymbol{F}_{\text{res}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{konstant}$		Inertiens lov
N2:	$\boldsymbol{F}_{\text{res}} = m \cdot \boldsymbol{a}$		Newtons bevægelseslov
N3:	$\boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{F}_1$		Loven om aktion og reaktion

Hvilke af disse love kan uændret indgå i relativitetsteorien?

Newtons 1. lov kan umiddelbart bruges også i relativitetsteorien. Selvom vi endnu ikke har defineret, hvad kraft er i denne teori, ønsker vi overensstemmelse med Newtons fundamentale påstand: uden kraft ingen acceleration. Denne lov tjener desuden til at fastlægge inertialsystemerne: kun i disse systemer er den opfyldt.

Newtons 3. lov (loven om aktion og reaktion), der påstår, at to legemer *på ethvert givet tidspunkt* vil påvirke hinanden med lige store, men modsat rettede kræfter, kan *ikke* længere bruges, hvis der er tale om to legemer, der *påvirker hinanden over afstand.* Hvis vi nemlig forestillede os, at to *adskildte* legemer på et givet tidspunkt - set fra *et* inertialsystem - påvirkede hinanden med lige store, men modsat rettede kræfter - så vil denne *samtidige* lighed mellem kræfternes størrelse ikke kunne opretholdes i alle andre inertialsystemer, da jo *samtidighed* er relativ - altså afhænger af det valgte inertialsystem.
Hvis der derimod er tale om kræfter, der virker i samme punkt (som ved kollosion af elementarpartikler, f.eks), er Newtons 3. lov også gyldig i relativitetsteorien.

Men hvad med Newtons bevægelseslov - den 2. lov? Vi har allerede tidligere set, at acceleration ændres ved skift af inertialsystem - se afsnittet om hyberbolsk bevægelse. Skal så også massen og/eller kraften ændres, for at opretholde den samme form på bevægelsesligningen i alle inertial-systemer? Der er allerede på denne baggrund klart, at Newtons 2. lov må modificeres for at kunne passe ind i relativitetsteorien.

For at bringe os et skridt nærmere denne omformning, indfører vi i Newtons fysik begrebet *impuls* af en partikel:

(4.1) $$\boldsymbol{p} = m \cdot \boldsymbol{v}$$

Hvis vi forudsætter, ar massen *m* er konstant, kan vi herefter formulere Newtons 2. lov på følgende måde:

(4.2) $$\boldsymbol{F}_{\text{res}} = m \cdot \boldsymbol{a} = m \cdot \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m \cdot \boldsymbol{v}\right) = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

Altså

(4.3) $$\boldsymbol{F}_{\text{res}} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$ **Newtons 2. lov**

Anvender vi denne udgave af Newtons 2. lov det tilfælde, hvor to partikler kolliderer med hinanden uden påvirkning af ydre kræfter, giver Newtons 3. lov:

(4.4) $$\boldsymbol{F}_{\text{res},2} = -\boldsymbol{F}_{\text{res},1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\boldsymbol{p}_2}{dt} = -\frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt} + \frac{d\boldsymbol{p}_2}{dt} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{konstant}$$

Som det fremgår, er Newtons 3. lov altså ensbetydense med *impulsbevarelse* for et isoleret system. Denne *bevarelseslov* vil vi forsøge at bibeholde i relativitetsteorien - men vi er, som vi straks skal se det, *nødt* til at ændre på impulsbegrebet (og massebegrebet). Når vi har fundet det ændrede udtryk for impulsen, vil vi *definere* en kraft ved hjælp af ligning (4.3). Dette vil vi først begrunde senere. Men nu til arbejdet med at finde et udtryk for den relativistiske impuls:

2. Impuls og masse i relativitetsteorien

Begrebet *impuls* for en partikel vil vi prøve at overtage fra Newtons fysik. Vi vil altså forsøge at skrive impulsen på følgende måde:

(2.1) $$\boldsymbol{p} = m \cdot \boldsymbol{v}$$

Impulsen er altså parallel med hastigheden. Størrelsen m vil vi kalde partiklens masse.
Vi skal nu se, at *kravet om impulsbevarelse i stød automatisk fører til, at partikelmassen må afhænge af farten* - og vi vil finde denne afhængighed.

Vi vil analysere et sammenstød mellem to identiske partikler A og B - f.eks. to protoner eller to elektroner.

Ved at variere stødparameteren d (se figur nedenfor) kan sammenstødet gøres mere eller mindre "hårdt". Store værdier af d vil stødkræfterne blive temmelig små, og partiklernes hastigheds-ændringer vil som følge heraf blive relativt små - dette vil vi udnytte i vores stødforsøg.

Følgende analyse følges bedst ved at sammenholde analysen med figur 1 nedenfor.
Før stødet er partikel B i hvile i systemet I' , og A bevæger sig i dette system med hastigheden $-v$ parallelt med x'-aksen. Tilsvarende er partiklen A i hvile i systemet I før stødet, og B bevæger sig i dette system med hastigheden v parallelt med x-aksen.
Systemet I er altså A's hvilesystem før stødet, I' er B's hvilesystem før stødet.

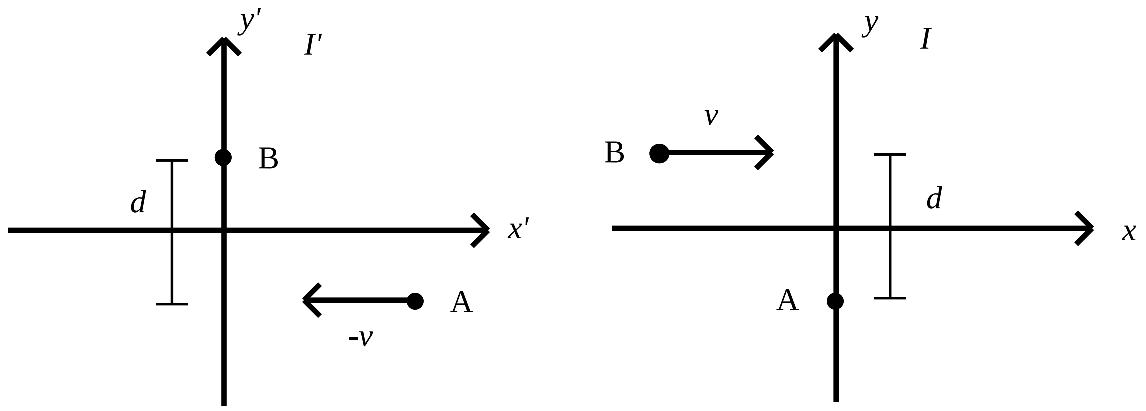


Fig.1a Situationen før stødet - som den ses fra de to systemer I og I'

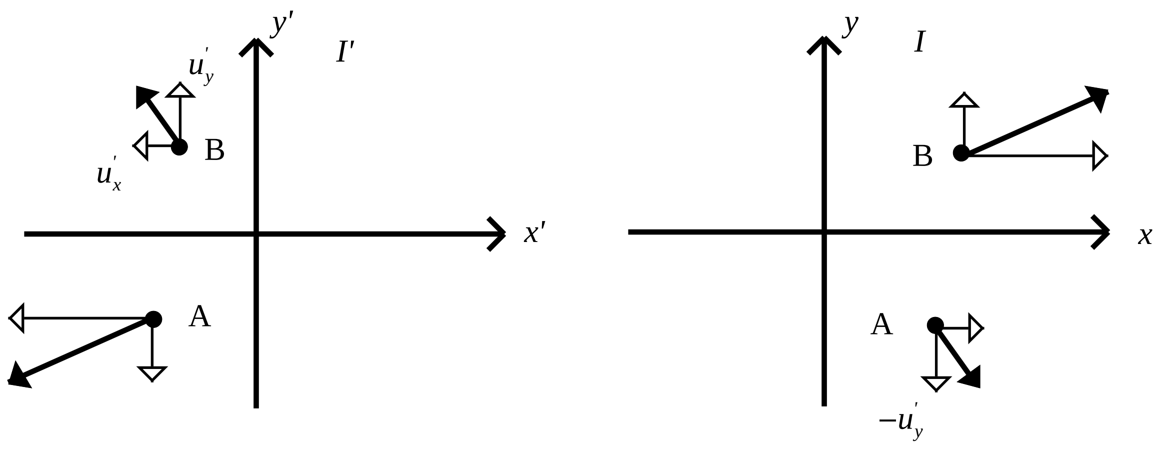


Fig.1b Situationen efter stødet - som den ses fra de to systemer I og I'

Af symmetrigrunde må de to partikler efter stødet have lige store, men modsat rettede hastigheds-komposanter i hver deres (tidligere hvile-)system. Specielt må hastighedskoordinaterne langs *y* (*y'*)-akserne være lige store - med modsat fortegn (u_y' og $-u_y'$). Se figur 1.b.

Partikel B's hastigskoordinat langs *y'*-aksen er u_y'. Transformeres denne til *I*-systemet ved hjælp af transformationsligningerne for hastighedskoordinater kapitel 4 ligning (8.3), finder vi partikel B's hastighedskoordinat langs *y*-aksen **i systemet *I***:

(2.1) $$\frac{u_y'}{\gamma(v)\cdot\left(1+u_x'\cdot v/c^2\right)}$$

Bevarelse af impuls-koordinater langs *y*-aksen i systemet *I* giver nu

(2.2) $$m_{\mathrm{B}}\cdot\frac{u_y'}{\gamma(v)\cdot\left(1+u_x'\cdot v/c^2\right)}=m_{\mathrm{A}}\cdot u_y'$$

Her er m_{B} og m_{A} masserne af partiklerne - ***bedømt fra systemet I***.
Af ligning (2.2) følger

(2.3) $$m_{\mathrm{B}}=m_{\mathrm{A}}\cdot\gamma(v)\cdot\left(1+u_x'\cdot v/c^2\right)$$

Vi betegner partiklernes *hvilemasser* (som jo er ens) m_0. Har partiklen farten *v*, betegner vi massen med *m*.
Lader vi nu afstanden *d* vokse i en forsøgsrække, vil vi gradvis opnå nogle "let strejfende" stød, hvor hastighedskomposanterne af de to partikler kun ændres ganske lidt - dvs.

Let strejfende stød: $u_x'\to 0$ og $u_y'\to 0$

Herved må $m_A \to m_0$ og $m_B \to m$

idet jo partikel A næsten er i hvile i systemet *I* (A's hvilesystem før stød), og partikel B har næsten uændret fart *v* i system *I*.
Altså giver ligning (2.3)

(2.4) $$m = m_0 \cdot \gamma(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Vi ser heraf, at massen vokser ved stigende fart - og at massen "går mod uendelig" når farten nærmer sig lysets fart *c*. Partiklen bliver derfor "uendelig tung", og kan derfor med en endelig kraft trækkes op på en fart, der er lig med lysets fart - eller over.
Udtrykket for partiklens impuls bliver som følge af (2.4)

(2.5) $$\boldsymbol{p} = m \cdot \boldsymbol{v} = \gamma(v) \cdot m_0 \cdot \boldsymbol{v} = \frac{m_0 \cdot \boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Dette udtryk er for små hastigheder identisk med det fra den Newtonske fysik velkendte $\boldsymbol{p} = m_0 \cdot \boldsymbol{v}$.

3. Newtons 2. lov - i relativistisk formulering

Den resulterende kraft *defineres* nu på følgende måde:

(3.1) $$\boldsymbol{F}_{\text{res}} = \frac{d\,\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m \cdot \boldsymbol{v}\right)$$

Her er massen *m* givet ved udtrykket (2.4) ovenfor.
Ved differentiation får vi

(3.2) $$\boldsymbol{F}_{\text{res}} = \frac{dm}{dt} \cdot \boldsymbol{v} + m \cdot \frac{d \cdot \boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dm}{dt} \cdot \boldsymbol{v} + m \cdot \boldsymbol{a}$$

Den resulterende kraft er altså ikke (altid) ensrettet med accelerationen, som det er tilfældet i Newtons fysik, men kan have en komposant i hastighedens retning. Se figur 2 nedenfor.

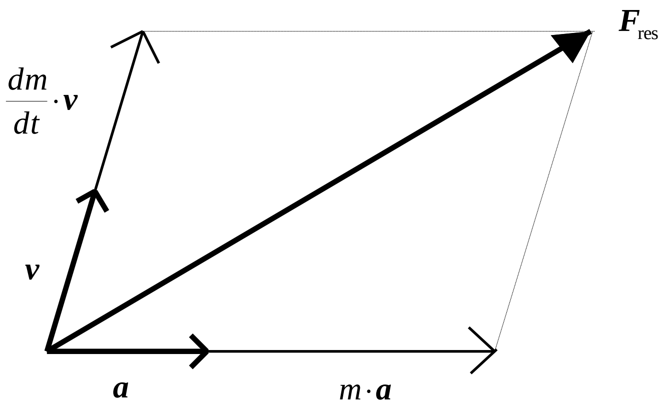


Fig.2 - den resulterende krafts komposanter

Udtrykket for dm/dt kan findes ved at differentiere den sammensatte funktion $m(v(t))$ i ligning (2.4). Resultatet er

(3.3) $$\frac{dm}{dt} = m_0 \cdot \frac{c^{-2}\cdot\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}}{\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{3/2}} = \gamma^3(v)\cdot m_0 \cdot \frac{\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}}{c^2}$$

Øvelse 1 Vis det!

Af denne ligning ser vi straks, at $dm/dt = 0$, hvis $\boldsymbol{u}$ er vinkelret på $\boldsymbol{a}$, hvis altså hastigheden er vinkelret på accelerationen - som det f.eks. er tilfældet ved den jævne cirkelbevægelse. Herved bliver

(3.4) $$\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{a}: \qquad \boldsymbol{F}_{\text{res}} = \gamma(v)\cdot m_0\cdot\boldsymbol{a}$$

hvor m er den relativistiske masse (2.4). De ligninger, vi har udledt for den jævne cirkelbevægelse er altså gyldige også i den specielle relativitetsteori - hvis vi blot erstatter massen med den relativistiske masse.
Hvis derimod hastigheden er ensrettet med accelerationen, gælder følgende:

(3.5) $$\boldsymbol{v} \text{ ensrettet med } \boldsymbol{a}: \qquad \boldsymbol{F}_{\text{res}} = \gamma^3(v)\cdot m_0\cdot\boldsymbol{a}$$

Øvelse 2 Vis det! (ikke helt let!)

Man kan med rette spørge, hvorfor den resulterende kraft defineres ved (3.1). Én årsag er, at denne sammenhæng for små hastigheder giver den velkendte Newtons 2. lov i den klassiske fysik. En anden vigtig begrundelse ligger i, at denne definition vil give impulsbevarelse ved kollision mellem partikler i et isoleret system - dette følger af Newtons 3. lov - som vi argumenterede for det i begyndelsen af dette kapitel. En tredie grund er kraftudtrykket i elektrodynamikken:

(3.6) $$\boldsymbol{F} = q \cdot (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

hvor q er partiklens elektriske ladning, $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$ er h.h.v. den elektriske feltstyrke og den magnetiske induktion. Her forudsættes den elektriske ladning uændret ved Lorentz-transformationen - som det også eksperimentelt er vist.
Transformations-egenskaberne for udtrykket (3.1) giver via ligning (3.6) de rigtige - har det vist sig - transformationsegenskaber for $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$.
Endelig tillader udtrykket (3.1) den sædvanlige definition af (et lille) arbejde - som kraftens skalarprodukt med en (lille) forskydningsvektor.

4. Energi og masse i relativitetsteorien

Vi er nu i stand til at finde det udtryk for bevægelsesenergi, der svarer til bevægelsesligningen (3.1). Arbejdssætningen kendt fra Newtons fysik er stadig gyldig:

(4.1) $$\Delta E_{\text{kin}} = A_{\text{res}}$$ **arbejds-sætningen**

(Tilvæksten i kinetisk energi er lig med den resulterende krafts arbejde)
Dette forudsætter, at vi definerer en krafts arbejde på den sædvanlige måde:

(4.2) $$dA = \boldsymbol{F} \cdot d\,\boldsymbol{s}$$ **definition af krafts arbejde**

(et lille arbejde er lig med skalarproduktet mellem kraften og den lille forskydningsvektor)
For bevægelse langs en ret linie (en-dimensional bevægelse!) finder vi ved hjælp af bevægelsesligningen (3.1):

(4.3) $$dA_{\text{res}} = F_{\text{res}} \cdot ds = \frac{dp}{dt} \cdot ds = \frac{dp}{dt} \cdot v \cdot dt$$

Bruger vi nu udtrykket for impuls (2.5):

(4.4) $$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m_0 \cdot v \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} + v \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) \cdot \frac{-2v/c^2}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{3/2}} \right) \cdot \frac{dv}{dt}$$

Dette udtryk reduceres ret let til

(4.5) $$\frac{dp}{dt} = m_0 \cdot \left(\frac{1}{\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{3/2}} \right) \cdot \frac{dv}{dt}$$

Indsat i (4.3) giver det

(4.6) $$dA_{\text{res}} = \frac{dp}{dt} \cdot v \cdot dt = m_0 \cdot \frac{1}{\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{3/2}} \cdot \frac{dv}{dt} \cdot v \cdot dt = m_0 \cdot \frac{v}{\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{3/2}} \cdot dv$$

Ligning (4.1) giver nu

(4.7) $$E_{\text{kin}} = A_{\text{res}} = m_0 \int_0^v \frac{u}{\left(1-\left(\frac{u}{c}\right)^2\right)^{3/2}} \cdot du = m_0 \cdot c^2 \int_0^{\frac{v}{c}} \frac{\frac{u}{c}}{\left(1-\left(\frac{u}{c}\right)^2\right)^{3/2}} \cdot d\left(\frac{u}{c}\right)$$

som let kan vises at give

(4.8) $$E_{\text{kin}} = A_{\text{res}} = m_0 \cdot c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right) = m_0 \cdot c^2 \left(\gamma(v) - 1\right)$$

Den kinetiske energi kan altså skrives

(4.9) $$E_{\text{kin}} = m_0 \cdot c^2 \left(\gamma(v)-1\right) = \left(m_0\gamma(v) - m_0\right) \cdot c^2 = \left(m - m_0\right) \cdot c^2 = \Delta m \cdot c^2$$

Her den relativistiske masse m indført.
Hvis farten v er lille sammenlignet med lysets fart, kan vi udnytte, at

(4.10) $$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{8}x^2 + \ldots \qquad \text{for} \qquad |x| < 1$$

til at finde følgende tilnærmede udtryk for den kinetiske energi for små hastigheder:

(4.11) $$E_{\text{kin}} = \tfrac{1}{2} \cdot m_0 \cdot v^2 + \tfrac{3}{8} \cdot m_0 \cdot v^4 / c^2 + \ldots$$

Vi får således i grænsen for små hastigheder det velkendte udtryk for den kinetiske energi fra Newtons fysik. Men det relativistiske udtryk for bevægelsesenergi giver for alle hastigheder en større værdi af bevægelsesenergien.

Det fremgår umiddelbart af udtrykket (4.9), at den kinetiske energi "går mod uendelig", når farten v nærmer sig lysets fart c. Der skal altså uendelig meget energi til at bringe farten op på lysets fart - hvilket derfor er umuligt for partikler med en hvilemasse m_0, der er forskellig fra 0.

Einstein generaliserede relationen (4.9) til

(4.12) $$E = m \cdot c^2$$ **Energi - masse relationen (Einstein, 1905)**

E er et *systems* energi af enhver slags (undtagen potentiel energi i et *ydre* kraftfelt). Massen *m* er systemets masse. Det er således ikke kun den kinetiske energi, der ifølge (4.9) bidrager til massen. Også de indre kræfter kan bidrage med en indre potentiel energi - og denne vil også bidrages til systemets masse.

Er der tale om *tiltrækkende* kræfter, vil den indre potentielle energi være negativ (når 0-punktet for den potentielle energi vælges i den tilstand, hvor systemet er skildt ad). Derfor vil denne potentielle energi levere et *negativt* bidrag til massen.

Eks.1 En atomkerne er et system af neutroner og protoner. I denne kerne bevæger neutroner og protoner sig rundt mellem hinanden med betydelige hastigheder. Grunden til, at nukleonerne alligevel ikke forsvinder ud af kernen er, at de påvirkes af de såkaldte stærke kernekræfter, der er tiltrækkende kræfter af en sådan styrke, at de formår at overvinde den betydelige elektriske frastødning, der er protonerne imellem. Atomkernens masse er lig med massen af de *adskildte* nukleoner, plus det *positive* massebidrag fra de kinetiske energier i kernen, plus det *positive* massebidrag fra den elektrisk potentielle energi (fra protonernes elektriske frastødning) og endelig det *negative* massebidrag fra de stærke kernekræfters potentielle energi. Dette sidste negative bidrag mere end opvejer de to positive bidrag fra de kinetiske energier og og den potentielle elektriske energi, således at atomkernens masse alt i alt er *mindre* end massen af de adskildte nukleoner.

Eks.2 En fjeder, der presses sammen, har en positiv (indre) potentiel energi. Denne potentielle energi bidrager via relationen (4.12) til fjederens masse, derfor vil en spændt fjeder have en masse, der er større end en uspændt fjeder.

En partikels hvilemasse kan ifølge formel (4.12) betragtes som "lagret" energi. Derfor kan en partikels hvilemasse også angives som en energi, der via ligningen (4.12) svarer til den givne hvilemasse. Denne energi kaldes *den ækvivalente energi*.

Eks.3 Elektronens hvilemasse er $9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$. Den ækvivalente energi er

$$E = m_0 \cdot c^2 = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot \left(3{,}00 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}\right)^2 = 8{,}20 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{J} = 0{,}511\,\mathrm{MeV}$$

En partikels masse kan helt omdannes til en anden energiform i det tilfælde, hvor en partikel møder sin antipartikel - antipartiklen er en partikel, der har samme masse som selve partiklen, men modsat elektrisk ladning m.v.

Eks.4 En elektron møder sin antipartikel - nemlig en positron. Herved tilintetgøres (annihilerer) de begge. De to partiklers hvilemasseenergier omdannes helt til gamma-stråle-energi, idet processen resulterer i dannelse af to gamma-kvanter, hver med en energi på $0{,}511\,\mathrm{MeV}$

En anden mulighed for at omdanne en stor del af en partikels masse til en anden energiform er at lade partiklen opsluge af et såkaldt sort hul - et (endnu hypotetisk?) område af rummet, hvor tyngdekræfterne er så stærke, at end ikke lys kan undslippe. Tyngdekræfterne udfører arbejde på partiklen - inden den opsluges af hullet. En del af dette arbejde (svarende til maksimalt 42,3% af hvilemasseenergien ved et roterende sort hul) kan udvindes som f.eks. varme og elektromagnetisk stråling.

Til sidst i dette afsnit vil vi vise en relation mellem energi og impuls, der følger af de allerede udledte udtryk (2.4) og (4.12):

(4.13) $$E = m \cdot c^2 = \gamma(v) \cdot m_0 \cdot c^2$$

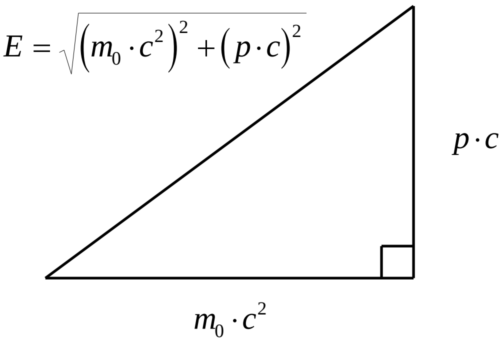


Fig.3 Energi-impulstrekanten

samt (2.5):

(4.14) $$p = \gamma(v) \cdot m_0 \cdot v$$

Ved hjælp af disse to udtryk kan følgende relation let eftervises:

(4.15) $$E^2 - p^2 \cdot c^2 = m_0^2 \cdot c^4$$

energi - impulsrelationen

Denne relation gælder også for *masseløse* partikler: $E = p \cdot c$.
Energi-impuls-relationen (4.15) kan minde lidt om Pytagoras' sætning, se følgende "impuls-energi-trekant" (fig.3).