

Rummet og tiden – og de sorte huller

- fra www.borgeleo.dk

Denne artikel omhandler egenskaber ved rummet og tiden i nærheden af et sort hul – den singularitet i rum og tid, der ifølge Einsteins relativitetsteori skulle eksistere og som manifesterer sig ved tilstedeværelsen af voldsomt stærke tyngdefelter.

Eksistensen af et sort hul er dog ikke til dato påvist med sikkerhed. Ikke desto mindre er der gode kandidater – f.eks. Cygnus X-1 og 2-3 stykker mere. Desuden vil der i nærmeste fremtid antagelig komme flere kandidater til disse sorte huller, idet flere satellitter i øjeblikket undersøger himlen for røntgenstråle-kilder og gammastråle-kilder. Hertil kommer, at der i radiofrekvens-området af det elektromagnetiske spektrum observeres tynde strømme af gas fra kvasarer, og disses eksistens tilskrives virkningen af super-massive sorte huller. Det må derfor forudses, at interessen for disse mærkværdige objekter vil tiltage – bl.a. derfor denne artikel.

(Det må pointeres, at artiklen vedrører et "nøgent" sort hul og ikke de tilvækstskiver – altså roterende gasskiver – der antagelig vil omgive et sort hul og som formodentlig er ansvarlig for udsendelsen af bl.a. røntgenstråling til omgivelserne, idet der ved gnidning og andre fysiske processer i gasskiven frigøres tyngde-potentiell energi ved gassens fald mod det sorte hul, og den heraf resulterende voldsomme opvarmning kan forårsage udsendelse af røntgenstråling.

Ejheller vedrører artiklen de mulige mekanismer for udsendelse af "jets" – tynde gasstrømme, der stråler ud i to modsatte retninger fra objektet – som observeres fra kvasarer og galaksekerne og som tilskrives eksistensen af et tungt, roterende sort hul i galaksens centrum. Denne mekanisme har måske sin rod i det svage magnetfelt, som den interstellare plasma medbringer i sit fald mod det sorte hul. Se iøvrigt ref.1 og ref.7)

Artiklen tager udgangspunkt i Newtons gravitationslov og den heraf følgende bevægelsesligning – som er velkendt, i hvert fald i kartesiske koordinater. P.g.a. rotations-symmetrien af denne er det mere naturligt at anvende polære koordinater. Det matematiske apparatur, man kan anvende ved transformation af denne bevægelsesligning til polære koordinater, er samtidig det apparatur, der anvendes i den almene relativitetsteori. Efter denne opvarmningsøvelse behandles først geometrien omkring et ikke-roterende, sort hul, den såkaldte Schwarzschildgeometri. Og endelig tages der fat på den specielle geometri, der er tilstede ved et roterende, elektrisk ladet sort hul – den såkaldte Kerr-Newmangeometri. Den anvendte parametrisering af rum-tiden er de såkaldte Boyer-Lindquist koordinater, idet disse giver simple bevægelsesligninger end Kerr-koordinater for en testpartikel påvirket af tyngdefeltet fra det sorte hul og det elektromagnetiske felt, der stammer fra den elektriske ladning på det sorte hul.

Bevægelsesligningerne for en test-partikel påvirket af tyngde- og elektromagnetisk felt fra det sorte hul opstilles – og løses *numerisk* – og i visse simple tilfælde også *analytisk*. Der fokuseres især på indflydelsen fra begivenhedshorisonten samt forskellige virkninger af hullets rotation.

1. Newtons gravitationslov – bevægelsesligning i polære koordinater

Som bekendt er ifølge Newtons gravitationslov kraften F mellem to punktformige masser m_1 og m_2 givet ved

$$(1.1) \quad F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

hvor r er afstanden mellem partiklerne, G er gravitationskonstanten, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$.

Vi antager for simpelhedens skyld, at vi har at gøre med en central masse M og en testpartikel med massen m , hvor m er ubetydelig i forhold til M . Herved vil massemidtunktet for systemet af de to partikler være identisk med M 's position. Dette vælges som Origo i beskrivelsessystemet. Vi ønsker at beskrive testpartiklens bevægelse under indflydelse af tyngdefeltet fra den centrale masse M . Vi skal så naturligvis anvende Newtons 2. lov på den generelle form, altså $F_{res} = m a$, hvor a er testpartiklens acceleration. Denne resulterende kraft sættes lig tyngdekraften (1.1), og derved fremkommer bevægelsesligningen

$$(1.2) \quad m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -G \frac{m M}{r^3} \mathbf{r} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -G \frac{M}{r^3} \mathbf{r}$$

Her er m på venstre side den inertielle masse, hvorimod m på højre side er den gravitationelle masse. Vi vil identificere disse, idet vi antager ækvivalens-princippet: kraften fra et tyngdefelt på et legeme er ækvivalent med reaktionen på en acceleration af legemet (tænk på Einsteins kasse). Desuden er \mathbf{r} stedvektoren for testpartiklen. Dette er velkendt. Derimod er det nok mindre velkendt, hvordan denne bevægelsesligning ser ud i polære koordinater – som jo er naturligt for dette centralsymmetriske problem.

For at tage hul på dette, fortolker vi (1.2) på følgende måde: såfremt tyngdekraften på højre side er $\mathbf{0}$, vil ligningen beskrive en ret linie – altså den i et Euklidisk rum korteste linie mellem to givne banepunkter (også kaldet en geodætisk linie). Løsningen til (1.2) er naturligvis i dette tilfælde

$$(1.3) \quad \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t$$

Tyngdekraften på højre side af (1.2) vil medføre, at banekurven vil afvige fra en ret linie. Opgaven er nu blot at opskrive bevægelsesligningen for jævn bevægelse i polære koordinater – og så indsætte tyngdekraften et passende sted!

Her vil vi gribe til Riemann-geometriens apparatur, der simpelthen fortæller os, hvordan vi løser denne opgave.

(Det skal siges, at det kan gøres lettere og mindre generelt – men med denne metode introduceres begrebsapparatur, som skal bruges senere.)

Først introduceres de polære koordinater (r, φ, θ) :

$$(1.4) \quad \begin{aligned} x &= r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ y &= r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z &= r \cos(\theta) \end{aligned}$$

hvor $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

Når vi ønsker at oversætte bevægelsesligningen (1.3) til polære koordinater, kan man simpelthen bare differentiere de tre koordinaterfunktioner i (1.4) to gange og sætte resultatet lig med 0. Herved fremkommer 3 ligninger, der alle indeholder de afledede

$$\frac{d^2 r}{dt^2}, \frac{d^2 \varphi}{dt^2}, \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

Opfattes disse som ubekendte, kan det lade sig gøre at løse ligningerne m.h.t. disse. Og dermed opstille bevægelsesligningerne for jævn bevægelse i polære koordinater. Her vil vi imidlertid udnytte, at matematikere allerede har løst det problem (ligning (1.8) og (1.9)):

Af (1.3) finder vi, at afstanden mellem to tætliggende punkter (koordinatforskel (dx, dy, dz) eller $(dr, d\varphi, d\theta)$) er givet ved

$$(1.5) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2 + r^2 d\theta^2$$

Denne størrelse betegnes undertiden som linieelementet – og kan f.eks benyttes til at beregne kurvelængden af en given kurve. Desuden kunne s bruges til at parametrisere en given kurve i rummet.

Idet vi opfatter højresiden i (1.5) som en kvadratisk form i de variable $(dr, d\varphi, d\theta)$, kan vi heraf aflæse den såkaldte metriske tensor g_{ik} :

$$(1.6) \quad g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad \text{hvor altså } g_{rr} = 1, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2(\theta), \quad g_{\theta\theta} = r^2.$$

Vi får også brug for den inverse til denne matrix:

$$(1.7) \quad g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix} \quad \text{hvor altså } g^{rr} = 1, \quad g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)}, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}.$$

Og så kommer det (altså bevægelsesligningerne for en partikel, der med konstant fart følger den korteste vej mellem to punkter – også kaldet jævn bevægelse):

Bevægelsesligningen for jævn bevægelse er i *vilkårlige* koordinater x^i , hvor i løber fra 1 til 3 (koordinatnumre!):

$$(1.8) \quad \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0$$

hvor

$$(1.9) \quad \Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{in} \left(\frac{\partial g_{nj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{nk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^n} \right)$$

Her er underforstået summation over dobbeltforekommende indices i hvert led. I (1.8) skal der således summeres over j og k , i (1.9) over n .

De indgående Γ -symboler kaldes de affine forbindelser – eller Christoffel-symboler.

Disse ligninger svarer nøje til bevægelsesligningerne (1.3), som blot er udtrykt i kartesiske koordinater.

Det ser måske lidt afskrækkende ud, men bruger vi (1.6) og (1.7) og differentierer dem som angivet i (1.9), finder vi:

$$(1.10) \quad \begin{array}{ll} \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r \sin^2(\theta) & \Gamma_{\theta\theta}^r = -r \\ \Gamma_{r\varphi}^{\varphi} = \frac{1}{r} & \Gamma_{\varphi\theta}^{\varphi} = \cot(\theta) \\ \Gamma_{r\theta}^{\theta} = \frac{1}{r} & \Gamma_{\varphi\varphi}^{\theta} = -\sin(\theta) \cos(\theta) \end{array}$$

Alle øvrige er 0 – på nær dem, der er symmetriske med ovenstående i de nedre indices – denne symmetri stammer fra, at den metriske tensor også er symmetrisk.

Bevægelsesligningerne for jævn bevægelse (1.3) i polære koordinater bliver så (af (1.8)):

$$(1.11) \quad \begin{array}{l} a) \quad \frac{d^2 r}{dt^2} - r \sin^2(\theta) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 0 \\ b) \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + 2 \cot(\theta) \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\theta}{dt} = 0 \\ c) \quad \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} - \cos(\theta) \sin(\theta) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = 0 \end{array}$$

Tyngdekraften indføres nu i ligning (1.11a) på højre side som i (1.2), idet jo kun den radiale bevægelse påvirkes af centralkraften:

$$(1.12) \quad a) \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = -G \frac{M}{r^2} + r \sin^2(\theta) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

$$b) \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{2}{r} \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} - 2 \cot(\theta) \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\theta}{dt}$$

$$c) \quad \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{2}{r} \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \cos(\theta) \sin(\theta) \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2$$

I ligning (1.12a) optræder på højre side (to) centrifugal-led, som måske lettest genkendes i det tilfælde, hvor $\theta = 90^\circ$ (bevægelseskonstant):

$$(1.12.1) \quad a) \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = -G \frac{M}{r^2} + r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2$$

$$b) \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{2}{r} \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt}$$

I tilfældet $r = \text{konstant}$, altså jævn cirkelbevægelse, er der ligevægt mellem tyngdekraften og centrifugalkraften, og vi får af (1.12.1a)

$$(1.13) \quad -G \frac{M}{r^2} + r \omega^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega^2 r^3 = GM, \quad \text{hvor } \omega \equiv \frac{d\varphi}{dt}$$

Dette er jo den velkendte Keplers 3. lov for jævn cirkelbevægelse.

Den *analytiske* "løsning" af ligningerne (1.12.1) er gennemgået i mange lærebøger – hvor der her ved en løsning forstås r som funktion af φ . Det er velkendt, at løsningerne er keglesnit: ellipser, parabler og hyperbler.

Derimod ligger det tungere med løsninger, hvor r og φ opskrives som funktion af tiden t – idet løsningsforsøget ender i et såkaldt elliptisk integral, der ikke kan udtrykkes ved elementære funktioner.

Vi kan dog godt få en ide om løsningerne udfra (1.12.1):

Bevægelseskonstanter

Af (1.12.1b) finder vi

$$(1.14) \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{2}{r} \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad r^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2r \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) = 0$$

hvoraf

$$J = r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{bevægelseskonstant}$$

Af (1.12.1a) finder vi efterfølgende

$$(1.15) \quad \frac{d^2r}{dt^2} = -G \frac{M}{r^2} + r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2r}{dt^2} = -G \frac{M}{r^2} + \frac{J^2}{r^3}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 \frac{dr}{dt} \frac{d^2r}{dt^2} = -2G \frac{M}{r^2} \frac{dr}{dt} + 2 \frac{J^2}{r^3} \frac{dr}{dt}$$

og videre heraf

$$\frac{d}{dt} \left(\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{2GM}{r} + \frac{J^2}{r^2} \right) = 0$$

Det følger heraf, at vi har en bevægelseskonstant E, hvor

$$(1.16) \quad 2E = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{2GM}{r} + \frac{J^2}{r^2} \quad \Leftrightarrow \quad E = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{GM}{r} + \frac{1}{2} \frac{J^2}{r^2}$$

Af (1.16) findes følgende ligning:

$$(1.17) \quad \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = 2E - \left(-\frac{2GM}{r} + \frac{J^2}{r^2} \right)$$

Det såkaldt effektive potential, der er afgørende for partiklens bevægelse, er så defineret ved

$$(1.18) \quad V(r) = \left(-\frac{2GM}{r} + \frac{J^2}{r^2} \right)$$

Af denne findes

$$(1.19) \quad V'(r) = \frac{2MG}{r^2} - 2 \frac{J^2}{r^3} = \frac{2}{r^3} (MGr - J^2)$$

Heraf ser vi, at V er aftagende for $r < MG/J^2$ og voksende for $r > MG/J^2$. V har minimum for $r = r_0 = MG/J^2$.

I dette minimum er jævn cirkelbevægelse mulig, såfremt $2E = V(r_0)$, se (1.17) med $dr/dt = 0$. Denne cirkelbevægelse er *stabil*, dvs. en *lille* tilvækst i dr/dt vil altid give en *lille* ændring af banen, idet E i (1.17) vil forøges en smule, og derved får ligningen for vendepunkterne $dr/dt = 0$ indsat i (1.17) nu to løsninger r_{\min} og r_{\max} , der begge er tæt på r_0 . Banen er blevet en smule elliptisk.

Uanset hvor meget dr/dt forøges (og dermed E forøges), vil vendepunktsligningen $dr/dt = 0$ indsat i (1.17) have en løsning r_{\min} , idet $V(r) \rightarrow \infty$ for $r \rightarrow 0$. *Partiklen vil altså ikke kunne bevæge sig til $r = 0$ såfremt $J \neq 0$.* Som vi vil se senere, er dette ikke tilfældet for partikelbevægelse omkring de sorte huller, der vil blive behandlet senere.

Numerisk er ligningerne (1.12.1) lette at løse, idet begyndelsesbetingelserne

$$(1.20) \quad (r_0, \varphi_0) \quad \text{og} \quad \left(\frac{dr}{dt}, \frac{d\varphi}{dt} \right)_0$$

skal angives. Her kan vinkelhastigheden $d\varphi/dt$ findes som v_{\perp}/r , hvor v_{\perp} er hastighedsvektorens komponent ortogonal på \mathbf{r} , $v_{\perp} = r(d\varphi/dt)$.

Herefter kan (1.12.1) opskrives som 4 koblede 1. ordens differentiaalligninger, når man indfører de variable $v_r = dr/dt$ og $v_{\varphi} = d\varphi/dt$.

Og så kan en passende Euler- eller Runge-Kutta metode "step by step" give os til en numerisk løsning.

Noget lignende gælder for de mere komplicerede bevægelsesligninger, vi støder på nedenfor.

2. Bevægelse nær sort hul – Schwarzschildgeometri

I 1916 lykkedes det K. Schwarzschild at løse Einsteins feltligninger for tyngdefeltet fra en punktformig masse – og således beskrive geometrien i nærheden af denne. I Einsteins teori er tyngdefeltet blot et udtryk for rummets geometri (eller rettere *rumtidens* geometri, idet tidsdimensionen indgår i den geometriske beskrivelse omtrent på linie med de tre rumdimensioner). Beskrivelsen af geometrien ved denne punktformige masse (og dermed også tyngdefeltet fra denne) gives i form af et linieelement i stil med (1.5):

$$(2.1) \quad -c^2 d\tau^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} dr^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2 + r^2 d\theta^2$$

Den masse, der giver anledning til (2.1), befinder sig i punktet $r = 0$.

Desuden er dt *egentiden* for bevægelsen mellem rumtidspunkterne (t, r, φ, θ) og $(t+dt, r+dr, \varphi+d\varphi, \theta+d\theta)$, dvs. tiden for bevægelsen mellem disse to punkter *målt på et ur, der følger bevægelsen*.

Et ur, der er i hvile i det her benyttede koordinatsystem (r, φ, θ) (altså $dr = 0$, $d\varphi = 0$, $d\theta = 0$), vil ifølge (2.1) vise tidstilvæksten (egentiden)

$$(2.2) \quad \Delta \hat{t} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \Delta t$$

Uret vil således gå langsommere end et tilsvarende ur langt fra den centrale masse (der har position $r = 0$). For et ur, der befinder sig i hvile langt fra den centrale masse M , ses af (2.2), at *tidsparameteren t er identisk med (egen-)tiden målt på et ur i hvile langt fra den centrale masse*.

Vi ser også af (2.2), at et ur, der befinder sig i hvile tæt ved positionen $r = r_g = 2GM/c^2$, vil vise en tid $\Delta \hat{t}$, som er meget mindre end Δt , d.v.s. at uret er næsten gået i stå – set fra den fjerne iagttager. Enhver bevægelse går meget langsomt, når et legeme er tæt på $r = r_g$ – bedømt af en iagttager fjernt fra denne position. Denne særlige "radius" kaldes Schwarzschild-radius.

Det skal her nævnes, at (2.2) skal forstås meget bogstaveligt: det amerikanske standardur, der er placeret i 1,5 km^s højde over havet, går (lidt!) hurtigere end det europæiske, der er placeret ved havoverfladen (i Paris).

Den rumlige geometri er bestemt af sidste del af (2.1):

$$(2.3) \quad ds^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} dr^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2 + r^2 d\theta^2$$

Ligheden med (1.5) er slående, men en længde ds i dette rum er ikke lig med dr , når vinklerne ifastholdes – og r er således blot en radial parameter – ikke den radiale afstand. Faktisk kan det vises af (2.3), at overfladen af en kugle er $4\pi r^2$ – men r er ikke kuglens radius!

Den rumlige geometri beskrevet ved (2.3) bryder sammen ved Schwarzschild-radius. Kuglefladen med $r = r_g$ kaldes *begivenhedshorizonten*, fordi intet – heller ikke lys – kan forlade området $r < r_g$. Begivenheder indenfor denne kugleflade er således ikke tilgængelige for iagttagere med

$r > r_g$. Derfor betegnes den del af rummet, der befinder sig indenfor denne kugleflade, for et sort hul. Ifølge Einsteins teori vil en testpartikel, der kun er påvirket af et tyngdefelt, følge en bane i den 4-dimensionale rumtid, der giver størst mulig egentid. Egentiden i (2.1) er en slags "afstand" i den 4-dimensionale rumtid, som ved frit fald altså skal være maksimal.

Vi har tidligere set på en lignende ekstremumsopgave: når en partikel ikke er påvirket af ydre kræfter, vil den ifølge Newtons 2. lov følge en ret linie – d.v.s. den *korteste* afstand mellem to givne punkter i rummet. De ligninger, der styrer denne bevægelse, er givet ved (1.8) og (1.9).

Den nye ekstremumsopgave, hvor det er egentiden, der skal være maksimal, er styret af præcis de samme ligninger – blot nu i 4 dimensioner! De giver altså den kurve i det 4-dimensionale rum, der udviser maksimal egentid for bevægelse mellem to punkter i rumtiden.

Da opgaven altså matematisk set er den samme, går vi frem på samme måde:

– først aflæser vi den metriske tensor g_{ik} for rumtiden af (2.1)

– dernæst beregner vi de affine forbindelser Γ_{jk}^i af (1.9)

– endelig har vi så bevægelsesligningerne i (1.8).

Ifølge (1.8) vil de forskellige affine forbindelser Γ_{jk}^i optræde som accelerationsled for de forskellige rumtids-kordinater – præcis som de to centrifugalaccelerationer på højre side af (1.12a). I den almene relativitetsteori er der ikke nogen skelnen mellem "rigtige" tyngdekræfter og "fiktive" kræfter (centrifugalkræfter, Corioliskræfter m.v.). De er nemlig alle "fiktive":

i en frit faldende, ikke roterende Einstein-kasse (et lokalt inertialsystem) er ingen af disse kræfter til stede.

Nu til opgaven:

Af (2.1) aflæser vi den metriske tensor:

$$(2.4) \quad g_{ik} = \begin{pmatrix} -Ac^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad \text{hvor} \quad A = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} = 1 - \frac{r_g}{r}$$

$$\text{altså} \quad g_{tt} = -Ac^2, \quad g_{rr} = \frac{1}{A}, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2(\theta), \quad g_{\theta\theta} = r^2$$

Vi skal også bruge den reciprokke tensor til (2.4):

$$(2.4.1) \quad g^{tt} = -\frac{1}{Ac^2}, \quad g^{rr} = A, \quad g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}$$

Og så beregnes de affine forbindelser:

$$(2.5) \quad \Gamma_{tt}^r = A \frac{c^2 r_g}{2r^2} \quad \Gamma_{rr}^r = -\frac{r_g}{2Ar^2} \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -Ar \sin^2(\theta) \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -Ar$$

$$\Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{r} \quad \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \cot(\theta)$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r} \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin(\theta) \cos(\theta)$$

$$\Gamma_{tr}^t = \frac{r_g}{2Ar^2}$$

hvor A er givet i (2.4). Igen er disse affine forbindelser symmetriske i de nedre indices. Bevægelsesligningerne (1.8) for frit fald i tyngdefeltet:

$$(2.6) \quad a) \quad \frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\frac{Ac^2 r_g}{2r^2} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \frac{r_g}{2Ar^2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + Ar \sin^2(\theta) \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 + Ar \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2$$

$$b) \quad \frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} = -\frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} - 2 \cot(\theta) \frac{d\varphi}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau}$$

$$c) \quad \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} = -\frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} + \sin(\theta) \cos(\theta) \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2$$

$$d) \quad \frac{d^2 t}{d\tau^2} = -\frac{r_g}{Ar^2} \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau}$$

hvor τ er egentiden for bevægelsen.

De 4 funktioner (t, r, φ, θ) er altså alle funktioner af parameteren τ .

Da det behandlede problem udviser kuglesymmetri, vil bevægelsen foregå i et plan indeholdende punktet $r = 0$, og vi kan derfor vælge dette plan til at være planet $\theta = \pi/2$. Dermed er (2.6c) opfyldt, og de øvrige simplificeres til

$$(2.6.1) \ a) \quad \frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\frac{Ac^2 r_g}{2r^2} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \frac{r_g}{2Ar^2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + Ar \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2$$

$$b) \quad \frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} = -\frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau}$$

$$c) \quad \frac{d^2 t}{d\tau^2} = -\frac{r_g}{Ar^2} \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} \quad \text{hvor} \quad A = 1 - \frac{r_g}{r}$$

Ønskes t som baneparameter – og det ønsker vi i den numeriske løsning – går vi frem på følgende måde:

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} \right) = \left(\frac{d^2 t}{d\tau^2} \frac{d}{dt} - \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \frac{d^2}{dt^2} \right)$$

I denne benyttes (2.6.1c), og vi finder

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = \left(-\frac{r_g}{Ar^2} \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} \frac{d}{dt} + \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \frac{d^2}{dt^2} \right) = \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \left(-\frac{r_g}{Ar^2} \frac{dr}{dt} \frac{d}{dt} + \frac{d^2}{dt^2} \right)$$

Denne identitet indføres nu på venstresiden af (2.6.1a og b), og de to ligninger multipliceres med $\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2$, hvorefter vi finder bevægelsesligningerne

$$(2.6.2) \ a) \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = -c^2 r_g \frac{A}{2r^2} + \frac{r_g}{2r^2} \left(2 + \frac{1}{A} \right) \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + Ar \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2$$

$$b) \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \left(-\frac{2}{r} + \frac{r_g}{r^2} \right) \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt}$$

Disse bevægelsesligninger kan nu sammenlignes med de tilsvarende (1.12.1) i Newtons gravitationsteori, idet det erindres, at $c^2 r_g = 2GM$. Vi får således Newtons ligninger igen, når følgende betingelser er opfyldt:

$$(2.7) \quad \text{Newtonske grænse:} \quad r \gg r_g \quad \text{og} \quad dr/dt \ll c$$

I denne grænse ser vi af højresiden i (2.6.2a), at leddet indeholdende dr/dt bliver ubetydeligt i forhold til første led på højresiden. Desuden er A i denne grænse ca. 1. I (2.6.2b) bliver leddet i parentesens r_g/r^2 ubetydeligt i forhold til det første led i parantesen.

Koordinatfart og lysets fart:

Nu til problemet: givet, at partiklen har hastighedskomponenterne

$$(2.8) \quad \frac{dr}{dt}, \quad \frac{d\varphi}{dt}$$

samt partiklens position, hvordan er da partiklens fart bestemt? (Vi forudsætter her, at $\theta = \pi/2 =$ bevægelseskonstant)

Af (2.3) finder vi

$$(2.9) \quad v_t^2 \equiv \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g_{rr} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + g_{\varphi\varphi} \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{1}{A} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

hvor vi har brugt v_t for partiklens koordinatfart. Ordet "koordinatfart" refererer her til, at tiden dt ikke er tiden målt af en lokal iagttager, men tiden målt af en fjern iagttager. Denne tidsparameter t er en af de anvendte parametre i det valgte koordinatsystem – derfor ordet.

For en lysstråle i samme retning finder vi af (2.1), idet egentiden $d\tau = 0$ for lys:

$$(2.10) \quad c_t^2 \equiv \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{A} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = Ac^2$$

hvoraf

$$c_t = c\sqrt{A} = c\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}$$

hvor vi har benyttet c_t for lysets koordinatfart.

Vi vil imidlertid også gerne have et mål for partiklens fart målt af en *lokal* iagttager. Det kan vi få, idet vi i stedet for tiden dt benytter den lokalt målte tid $d\hat{t}$ defineret ved (2.2). Vi indsætter (2.2) og (2.3) i (2.1) og får

$$(2.11) \quad c^2 d\tau^2 = c^2 \left(d\hat{t}\right)^2 - ds^2$$

Er der tale om lys, er $d\tau = 0$, og af (2.11) ser vi, at lysets fart $ds/d\hat{t} = c$! Når tider (og længder) måles med standardure og målestokke *on location*, finder vi det velkendte postulat fra den specielle relativitetsteori.

For enhver partikel vil vi derfor definere partiklens fysiske fart β på følgende måde:

$$(2.12) \quad \beta \equiv \frac{1}{c} ds/d\hat{t}$$

Det bemærkes, at β for fysiske objekter altid vil være mindre end eller lig 1.

Af (2.2) og (2.9) finder vi partiklens fysiske fart udtrykt ved koordinathastighederne:

$$(2.13) \quad \beta^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \left(\frac{dt}{d\hat{t}}\right)^2 = \left(\frac{1}{A} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right) \frac{1}{A^2 c^2}$$

Til sidst vil vi – da vi senere skal bruge dette udtryk – finde tilvæksten i egentid udtrykt ved β . Af (2.11) og (2.12) følger

$$(2.14) \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{d\tau}{d\hat{t}} \frac{d\hat{t}}{dt} = \sqrt{1-\beta^2} \sqrt{A}$$

Begyndelsesbetingelser

Den omvendte opgave står vi over for, når startbetingelserne for (2.6.2) skal opstilles: givet en position, samt en retning for hastighedsvektoren, samt partiklens fart relativt til lyset β , hvordan findes da koordinathastighederne dr/dt og $d\varphi/dt$?

Ved hjælp af de til bestemmelse af partiklens bevægelsesretning opgivne (ikke normerede) hastighedskomponenter

$$(2.15) \quad w^r = \sqrt{g_{rr}} \frac{dr}{dt} \quad \text{og} \quad w^\varphi = \sqrt{g_{\varphi\varphi}} \frac{d\varphi}{dt}$$

kan den (ikke normerede) fart v_t i (2.9) beregnes: $v_t^2 = (w^r)^2 + (w^\varphi)^2$. Heraf kan så beregnes en enhedsvektor e^i (i koordinatsystemet $(dr, d\varphi)$) i bevægelsens retning:

$$(2.16) \quad e^r = \frac{w^r}{v_t \sqrt{g_{rr}}} \quad e^\varphi = \frac{w^\varphi}{v_t \sqrt{g_{\varphi\varphi}}}$$

Partiklens hastighedskomponenter findes så af

$$(2.17) \quad \frac{dr}{dt} = \beta c_t e^r \quad \frac{d\varphi}{dt} = \beta c_t e^\varphi$$

Her er c_t givet ved (2.10). Vi er således parat til at løse (2.6.2) numerisk – eller analytisk.

Bevægelseskonstanter:

På grund af problemets rotationssymmetri og at de geometriske størrelser g_{ik} er tidsuafhængige, er der to oplagte bevægelseskonstanter: impulsmomentet og energien af testpartiklen.

Begge størrelser fås ved integration af bevægelsesligningerne (2.6.2):

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = -\frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} \quad \Leftrightarrow \quad r^2 \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + 2r \frac{d\varphi}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{d\tau} \left(r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} \right) = 0$$

hvoraf

$$(2.18) \quad J \equiv r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = \text{konstant}$$

(2.6.1c) kan integreres til ligningen

$$(2.19.1) \quad \frac{dt}{d\tau} A = \text{konstant}$$

Vi *definerer* partiklens energi E (inklusiv hvilemasse!) pr.masseenhed som denne konstant – begrundelse følger senere:

$$(2.19.2) \quad E \equiv \frac{dt}{d\tau} A c^2$$

Hvis vi benytter (2.14) sammen med denne, finder vi følgende udtryk for E :

$$(2.20) \quad E = \frac{dt}{d\tau} A c^2 = \sqrt{\frac{1-r_g/r}{1-\beta^2}} c^2$$

Hvis farten er lille og r er stor – altså den Newtonske grænse (2.8) – kan vi rækkeudvikle (2.20) og finder

$$(2.21) \quad E \approx \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 - r_g/2r \right) c^2 = c^2 + \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r} = c^2 + E_{\text{Newton}}$$

hvor E_{Newton} er den mekaniske energi pr. masseenhed i den Newtonske mekanik. Dette gør det rimeligt at kalde E for partiklens (mekaniske) energi pr. masseenhed.

Idet E er en bevægelseskonstant, ses det af (2.20), at $\beta \rightarrow 1_-$ for $r \rightarrow r_{g+}$. Enhver partikel vil således nærme sig lysets fart, såfremt den nærmer sig begivenhedshorisonten $r = r_g$ – og det uanset begyndelsessted og begyndelsesfart! For $r < r_g$ bliver $\beta > 1$. Det betyder, at ingen partikel kan forblive i hvile i dette område af rummet. Alle bevægelser er rettet mod $r = 0$. Derfor kaldes $r = r_g$ også den statiske grænse. Det her anvendte *statiske* koordinatsystem er ikke længere hensigtsmæssigt for den fysiske beskrivelse, hvis man ønsker, at partikler skal have en fart, der er mindre end lysets. I dette område kan det her anvendte koordinatsystem f.eks. erstattes med et beskrivelsessystem, der følger frit faldende partikler, der har $\beta = 0$ for $r = \infty$. Se ref.7 afsnit 2.4.

Ser vi igen på en partikel, hvor $r > r_g$, kan vi af (2.20) finde den mindste fart, som tillader partiklen at undslippe til $r = \infty$. Farten i uendelig er 0, og derfor er $E = c^2$, hvoraf

$$(2.22) \text{ Escapefart: } E = c^2 \Leftrightarrow \frac{1-r_g/r}{1-\beta^2} = 1 \Leftrightarrow v_{\text{esc}} \equiv c\beta = c\sqrt{\frac{r_g}{r}} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Escapefarten er givet ved præcis samme udtryk som i Newtons teori. Desuden ser vi af (2.22), at escapefarten ved begivenhedshorizonten $r = r_g$ er lyshastigheden.

Er der tale om en partikel med lysets fart, er $\beta = 1$, og E er ikke defineret. For dette tilfælde havde det været bedre at benytte bevægelseskonstanten $1/E$, idet denne for disse partikler er 0. Denne bevægelseskonstant sikrer, at partikler med $\beta = 1$ beholder deres fart! Ellers kan $1/E$ ikke forblive 0.

For partikler, der bevæger sig med lysets fart, dur (2.18) og (2.19) ikke, da $d\tau = 0$. Derimod kan vi bruge *forholdet* mellem J og E som bevægelseskonstant – også i dette tilfælde:

$$(2.23) \quad \frac{J}{E} = \frac{r^2 \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{d\tau}}{Ac^2 \frac{dt}{d\tau}} = \frac{r^2 \frac{d\varphi}{dt}}{Ac^2}$$

Vi kan nu – til senere brug – ved hjælp af de to integrationskonstanter E og J opnå en 1.ordens differentialligning for r. Vi begynder med at dividere (2.1) med $d\tau^2$, stadigvæk under forudsætningen $\theta = \pi/2$:

$$(2.24) \quad c^2 = Ac^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{A} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2$$

Benytter vi så definitionerne (2.18) og (2.19) for J og E, finder vi efter lidt omordning af leddene endelig 1.ordens differentialligningen

$$(2.25) \quad \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = c^2 \left(\left(\frac{E}{c^2} \right)^2 - A \left(1 + \frac{J^2}{c^2 r^2} \right) \right)$$

Jævn cirkelbevægelse:

I (2.6.2a) sætter vi $r = \text{konstant}$, og vi får:

$$(2.26) \quad 0 = -\frac{c^2 r_g}{2r^2} + Ar\omega^2 \quad \text{hvor} \quad \omega \equiv \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\omega^2 = \frac{c^2 r_g}{2r^3}$$

Altså samme ligning som Keplers 3. lov (1.13).

(2.26) indsættes i (2.13):

$$(2.27) \quad \beta^2 = \frac{r^2 \omega^2}{A^2 c^2} = \frac{r_g}{2r - 2r_g}$$

Forlanger vi nu, at partiklens fart skal være mindre end lysets, altså $\beta \leq 1$, finder vi:

$$(2.28) \quad \beta \leq 1 \Leftrightarrow r \geq 1,5r_g$$

Specielt er jævn cirkelbevægelse mulig for en lysstråle, når $r = 1,5$ Schwarzschildradius! Bevægelseskonstanten (2.23) bliver for denne banebevægelse:

$$(2.29) \quad \frac{J}{E} = \frac{r^2 \omega}{Ac^2} = \frac{r^2}{Ac^2} \sqrt{\frac{c^2 r_g}{2r^3}} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{rr_g}{2}} \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} r_g / c$$

Stabilitet af cirkelbaner

I modsætning til Newtons gravitationsteori er ikke alle cirkelbevælgelser omkring det sorte hul stabile: en lille ændring af partiklens fart kan i nogle tilfælde føre til, at partiklen enten hurtigt falder mod begivenhedshorisonten eller fjerner sig mod $r = \infty$. Denne ændring kunne f.eks. skyldes energi- og impulsmomenttab som følge af udsendelse af gravitationsstråling eller sammenstød med andre partikler, der kredser om hullet.

For at undersøge dette nøjere, ser vi på ligning (2.25) igen:

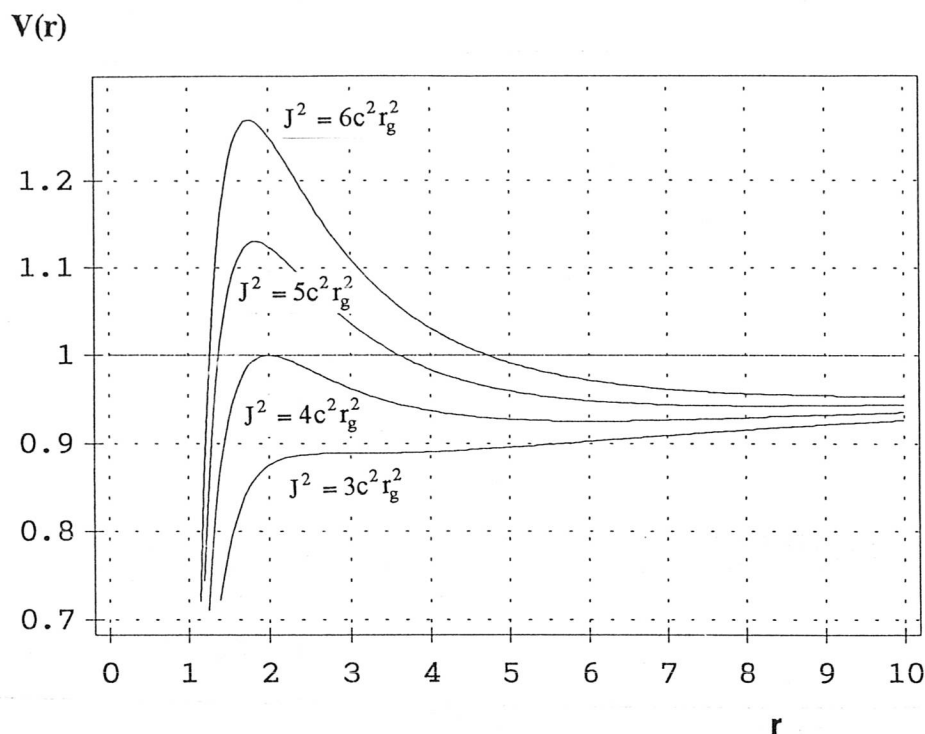
$$(2.30) \quad \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = c^2 \left(\left(\frac{E}{c^2}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(1 + \frac{J^2}{c^2 r^2}\right) \right)$$

Vi definerer nu det effektive potential $V(r)$ på følgende måde:

$$(2.31) \quad V(r) = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(1 + \frac{J^2}{c^2 r^2}\right)$$

Af (2.30) ser vi så, at bevægelse er mulig i områder, hvor $V(r) \leq (E/c^2)^2$. Og umulig, hvis $V(r) > (E/c^2)^2$. Partiklen vil have vendepunkter, hvor $V(r) = (E/c^2)^2$, idet $dr/d\tau$ her er 0.

På nedenstående figur ses grafen for $V(r)$ i fire tilfælde: graferne, der udviser et maksimum har $J^2 = 6c^2 r_g^2$, $J^2 = 5c^2 r_g^2$, $J^2 = 4c^2 r_g^2$, og grafen med vendetangent (se nedenfor) $J^2 = 3c^2 r_g^2$. For mindre værdier af J^2 er $V(r)$ voksende. Det fremgår af denne figur, at en banebevægelse med de tre første værdier af J^2 kan være stabil mod at falde i den sorte gryde, når partiklen kommer fra store r -værdier (såfremt værdien af bevægelseskonstanten $(E/c^2)^2$ er mindre end potentialmaksimum) medens den sidste ikke er det: der er ikke nogen "top" i potentialet, der kunne gøre det umuligt for partiklen at passere ind til $r = r_g$.



Figur 2.1
Figuren viser det effektive potential for fire forskellige værdier af J^2 . Det effektive potential er en hjælpestørrelse i forbindelse med analysen af bevægelsesligningen (2.25)

For at finde grænsetilfældet mellem de potentialer, der udviser et maksimum og de, der ikke gør det, vil vi prøve at finde parametrene E og J for den bane, hvor $V(r)$ har en vendetangent. Vi vil altså prøve at finde E og J , sådan at differentialkoefficienten $V'(r)$ har fortegnforløbet $+0+$:

$$V'(r) = \frac{r_g}{r^2} \left(1 + \frac{J^2}{c^2 r^2} \right) - 2 \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \frac{J^2}{c^2 r^3} = \frac{1}{r^4} \left(r_g r^2 - 2 \frac{J^2}{c^2} r + 3 r_g \frac{J^2}{c^2} \right)$$

Diskriminanten for 2. gradspolynomiet i parantesen er

$$D = 4 \left(\frac{J^2}{c^2} \right)^2 - 4 r_g \cdot 3 r_g \frac{J^2}{c^2} = 4 \frac{J^2}{c^4} (J^2 - 3 c^2 r_g^2)$$

hvoraf

$$V'(r) = 0 \text{ har en løsning} \quad \Leftrightarrow \quad D = 0$$

eller

$$(2.32) \quad J^2 = 3 c^2 r_g^2$$

Indsat i $V'(r)$ giver det

$$V'(r) = \frac{r_g}{r^4} (r - 3 r_g)^2$$

Vendetangenten findes derfor for $r = 3 r_g$, og kun i det tilfælde, hvor $J^2 = 3 c^2 r_g^2$. Skal partiklen i dette tilfælde undgå at styrte i hullet, må dr/dp være 0 for $r = 3 r_g$, og derfor må ifølge (2.30)

$$E/c^2 = \sqrt{V(3 r_g)}.$$

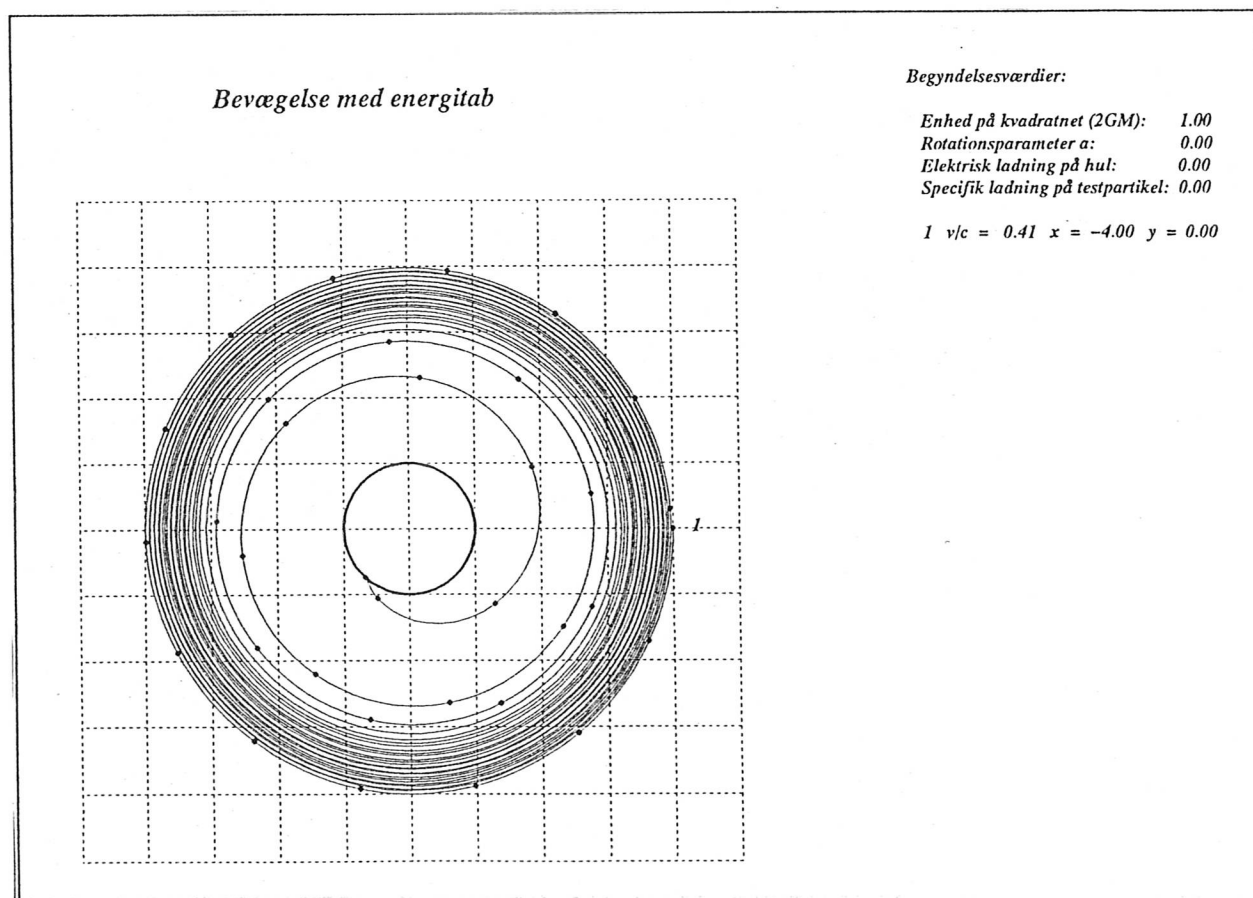
Heraf fås endelig af (2.31) energien E for den cirkelbane, der lige netop er grænsetilfældet mellem de stabile cirkelbaner og de ustabile cirkelbaner:

$$(2.33) \quad \text{Grænsetilfælde for stabil cirkelbane:} \quad r = 3r_g, J = \sqrt{3}cr_g, E = c^2 \sqrt{\frac{8}{9}}$$

Forestiller vi os, at en partikel cirkulerer omkring det sorte hul og langsomt mister energi til omgivelserne, vil den tilnærmelsesvis bevæge sig i en cirkelbane, indtil $r = 3r_g$. Herefter vil den hurtigt styrte mod hullet uden nævneværdigt energitab. Den energi, der er afgivet til omgivelserne, er så, idet partiklens energi langt fra hullet er $1mc^2$ (se (2.20) og (2.27)):

$$(2.34) \quad \text{Frigjort energi:} \quad mc^2 - mc^2 \sqrt{\frac{8}{9}} = 0,0572mc^2 = 5,72\% \text{ af hvilemasseenergien}$$

Det hurtige fald mod hullet er nedenfor anskueliggjort ved at påbegynde en cirkelbevægelse for $r = 4r_g$, og i bevægelsesligningen (2.6.2) at indføre en svag "friktionskraft" proportional med $d\varphi/dt$. Der er kun sat tidsmarkeringer i første omløb og for $r < 3r_g$ – for overskuelighedens skyld.



Figur 2.2

Figuren viser det hurtige fald mod hullet for $r < 3r_g$ for en spiralbevægelse opnået ved at indføre svag friktionskraft på partiklen. Tidsrummet mellem de markerede punkter er $\Delta t = 5r_g/c$. Der er kun afsat tidsmarkeringer for det første omløb, samt for $r < 3r_g$.

Frit fald mod det sorte hul

Vi skal nu se på den store betydning, som det anvendte referencesystem har for den tid, som et frit fald mod det sorte hul tager.

Vi begynder med det simpleste tilfælde: en foton på vej direkte mod

begivenhedshorisonten. Af (2.1) finder vi, idet $d\varphi = 0$ og $d\theta = 0$, $\theta = \pi/2$ og for en foton $d\tau = 0$:

$$(2.35) \quad d\tau = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dr}{dt} = -c \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \quad \Leftrightarrow \quad dt = \frac{-dr / c}{1 - \frac{r_g}{r}}$$

hvoraf

$$ct = - \int_{r_0}^r \frac{dr}{1 - r/r_g} = r_0 - r + \ln \left(\frac{r_0 - r_g}{r - r_g} \right)$$

Vi ser, at $t \rightarrow \infty$ for $r \rightarrow r_{g+}$. Altså: bevægelsen fra $r = r_0$ til $r = r_g$ tager uendelig lang tid bedømt af en iagttager i hvile! På den anden side er der tale om en foton, der jo ikke bruger nogen egentid, altså $\tau = 0$. Det kan da kaldes noget af en forskel!

For en partikel med begyndelsesfart mod det sorte hul, der er mindre end lysets fart, vil tiden t ligesledes divergere, idet bevægelseskonstanten E i (2.20) jo sikrer, at farten nærmer sig lysets når partiklen nærmer sig horisonten, derfor fås et lignende tidsforløb som i (2.35). Tiden må jo forventes at være længere end for lyset, eftersom partiklen er langsommere. Derfor kan vi ikke forvente en endelig tid.

Derimod vil *egentiden* τ for faldet fra en "afstand" r_0 til $r = 0$ (altså til singulariteten!) være endelig:

$$(2.36) \quad \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r_0} - \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \right) = c^2 \left(\frac{r_g}{r} - \frac{r_g}{r_0} \right)$$

\Rightarrow

$$d\tau = \frac{1}{c} \frac{-dr}{\sqrt{\frac{r_g}{r} - \frac{r_g}{r_0}}}$$

hvoraf

$$\tau = - \frac{1}{c} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{r_g}{r} - \frac{r_g}{r_0}}} = \frac{1}{c} \frac{\sqrt{r_0}}{\sqrt{r_g}} \int_r^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{\frac{r_0}{r} - 1}} = \frac{1}{c} \frac{\sqrt{r_0}}{\sqrt{r_g}} \left[-\sqrt{r_0 r - r^2} - r_0 \text{Arc sin} \sqrt{1 - \frac{r}{r_0}} \right]_r^{r_0}$$

Sætter vi her $r = 0$, fås:

$$(2.37) \tau = \sqrt{\frac{r_0}{r_g}} \frac{r_0}{c} \text{Arc sin}(1) = \sqrt{\frac{r_0}{r_g}} \frac{r_0}{c} \frac{\pi}{2}$$

Denne tid er i høj grad endelig. Antager vi f.eks. at det sorte hul har en masse på 1 solmasse, er Schwarzschildradius 3 km. Et fald fra $r_0 = 700000$ km (Solens radius) til $r = 0$ vil tage egentiden

$$\tau = \sqrt{\frac{700000 \text{ km}}{3 \text{ km}}} \frac{700000 \text{ km}}{300000 \text{ km/s}} \frac{\pi}{2} = 1770 \text{ sek}$$

Det må siges at være mindre end den uendelige tid, enhver iagttagere i hvile vil se for blot faldet til begivenhedshorisonten $r = r_g$.

Iøvrigt er tiden τ i (2.37) præcis den samme tid, som kan beregnes fra Newtons bevægelsesligning (1.12.1a). I dette tilfælde kan udtrykket (2.37) også begrundes ud fra Keplers 3. lov.

Bevægelsesligning (2.6.2) med t som parameter og begyndelsesfart 0 er løst numerisk på fig.2.3 nedenfor. Partiklens fald påbegyndes i punktet nummereret 1.

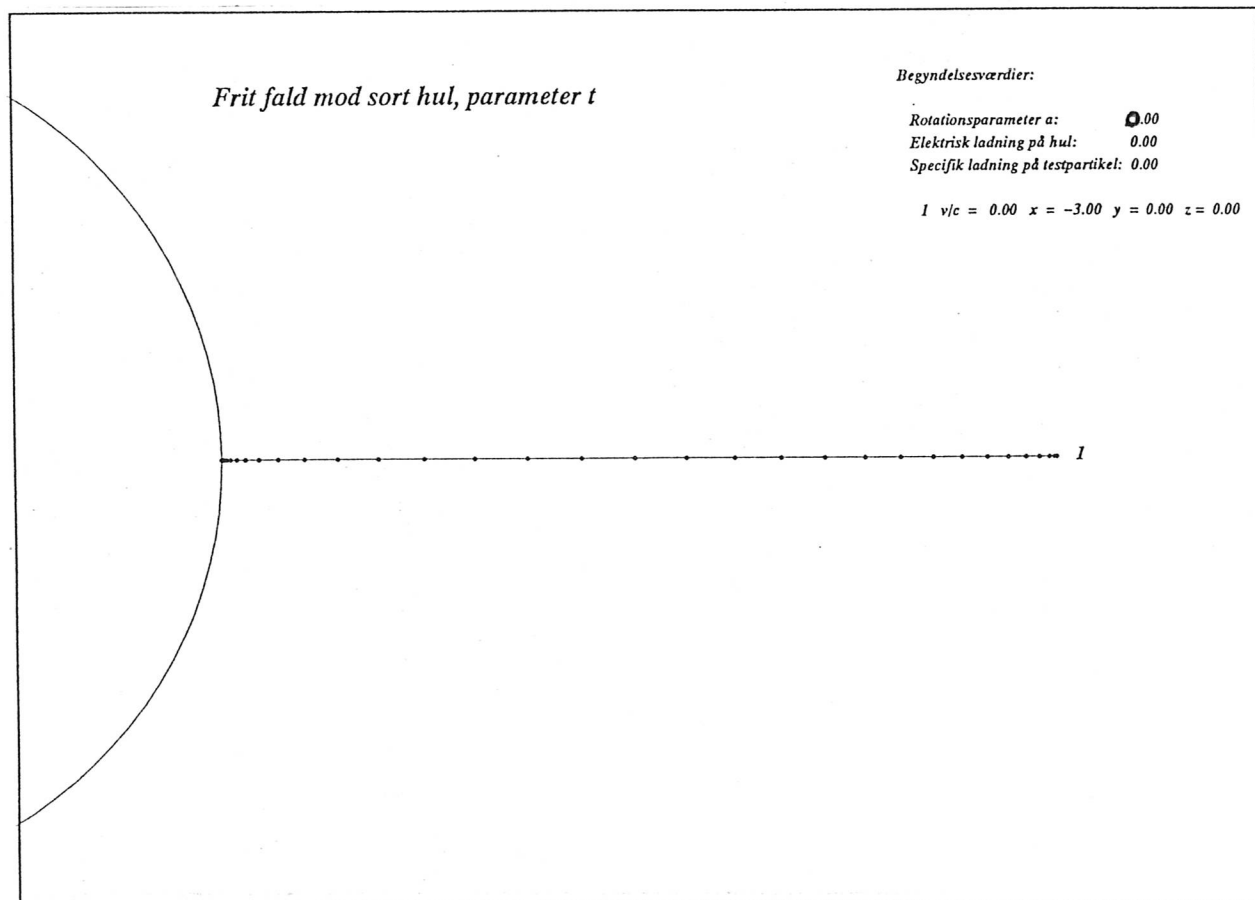


Fig.2.3

Figuren viser frit fald mod begivenhedshorisonten, parameter t . Tidsrummet mellem de markerede punkter er $\Delta t = 0,5r_g/c$ – og r har begyndelsesværdien $3r_g$.

Som det fremgår af figuren ses i begyndelsen af faldet en stigende fart mod begivenhedshorizonten, der er markeret ved en del af en cirkel. Men i den sidste del af bevægelsen ses, at tids-markeringerne ligger tættere og tættere – partiklen når aldrig $r = r_g$. Ikke desto mindre nærmer partiklens fart sig lysets – som imidlertid også formindskes, når lyset nærmer sig $r = r_g$, som det fremgår af ligning (2.11).

I modsætning hertil er der ikke nogen problemer med at passere begivenhedshorizonten, når bevægelsen følges fra en frit faldende partikel – og egentiden benyttes som baneparameter. En astronaut vil således nå singulariteten i $r = 0$ i løbet af en endelig tid målt på dennes eget ur. Det vil imidlertid have nogle ubehagelige konsekvenser: tidevands-kræfterne vil rive både rumfartøjet og staklen i atomer. Accelerationen i det frie fald vil nemlig være større på de dele, der er tættest på $r = 0$, og det vil bevirke en voldsom udstrækning af de lemmer, der falder mod singulariteten.

Fotonbaner i tyngdefeltet

På figur 2 nedenfor ses 9 forskellige fotonbaner i tyngdefeltet ved det sorte hul, hvis begivenhedshorizont er tegnet som en kugle med radius 1. Alle baner ligger i det med kvadratnet markerede x - y -plan ($\theta = \pi/2$). Jo tættere fotonen passerer forbi hullet, desto mere afbøjes fotonens bevægelsesretning – en effekt, der er velkendt fra det stjernelys, der passerer gennem Solens tyngdefelt på sin vej til jorden. I dette tilfælde er afbøjningen naturligvis langt mindre end på fig.4 p.g.a. det langt svagere tyngdefelt fra Solen. Ændringerne i stjernepositioner stemmer ikke desto mindre godt overens med hvad den her behandlede teori forudsiger.

En anden effekt, der også tydeligt fremgår af denne figur, er den forsinkelse, som elektromagnetisk stråling opnår ved at passere tæt forbi det sorte hul. Dette ses ved at sammenligne de markerede tidspunkter for de baner, der er tættere på hullet med de tilsvarende for fjernere baner. Netop denne effekt kan også måles i solsystemet, idet radarstråler fra Jorden sendes tæt forbi Solen, rammer Merkur og reflekteres herfra. Forsinkelsen i Solens tyngdefelt er af størrelsen max. 240 mikrosekunder. Igen er overensstemmelsen med den her omtalte teori overbevisende.

Det fremgår også af fig.2.4, at fotonbane nr.8 ender som en cirkelbevægelse. Baner tættere på falder hurtigt mod begivenhedshorizonten – som bane nr.9. Det sorte hul kan altså absorbere fotoner – såvel som (andre) partikler.

For at finde ud af, hvor stor evne det sorte hul har for at absorbere fotoner, skal vi finde ud af, hvor langt fra retningen mod det sorte hul vi skal skyde vores partikel af, for at den lige netop går ind i en jævn cirkelbevægelse. Hertil skal vi bruge en under bevægelsen bevaret størrelse, nemlig bevægelseskonstanren J/E fra ligning (2.23). For cirkelbanen, som denne partikel ender i, har vi allerede udregnet J/E , se afsnittet om jævn cirkelbevægelse ligning (2.29).

Langt fra det sorte hul kan partiklens impulsmoment pr. masseenhed $J_t = r^2 d\varphi/dt$ beregnes som partiklens fart gange afstanden fra partiklen til den med partiklens hastighedsvektor parallelle akse gennem $r = 0$ – også kaldet stødparameteren b . Heraf fås så af (2.23), idet $A \rightarrow 1$ for $r \rightarrow \infty$:

$$(2.38) \quad \frac{J}{E} = \frac{c \cdot b}{c^2} = \frac{3\sqrt{3} r_g}{2 c} \quad \text{hvoraf} \quad b = \frac{3\sqrt{3}}{2} r_g$$

Endelig kan vi så finde hullets tværsnit for at indfange partiklen som arealet af cirklen med radius b :

$$(2.39) \quad \sigma_{foton} = \pi b^2 = \pi \frac{27}{4} r_g^2$$

Er hullets masse f.eks. 1 solmasse, er $r_g = 3\text{ km}$, og $b = 7,79\text{ km}$, tværsnittet (2.39) bliver $\sigma = 191\text{ km}^2$. For partikler med $\beta_\infty < 1$ bliver tværsnittet for absorption større end (2.39) angiver.

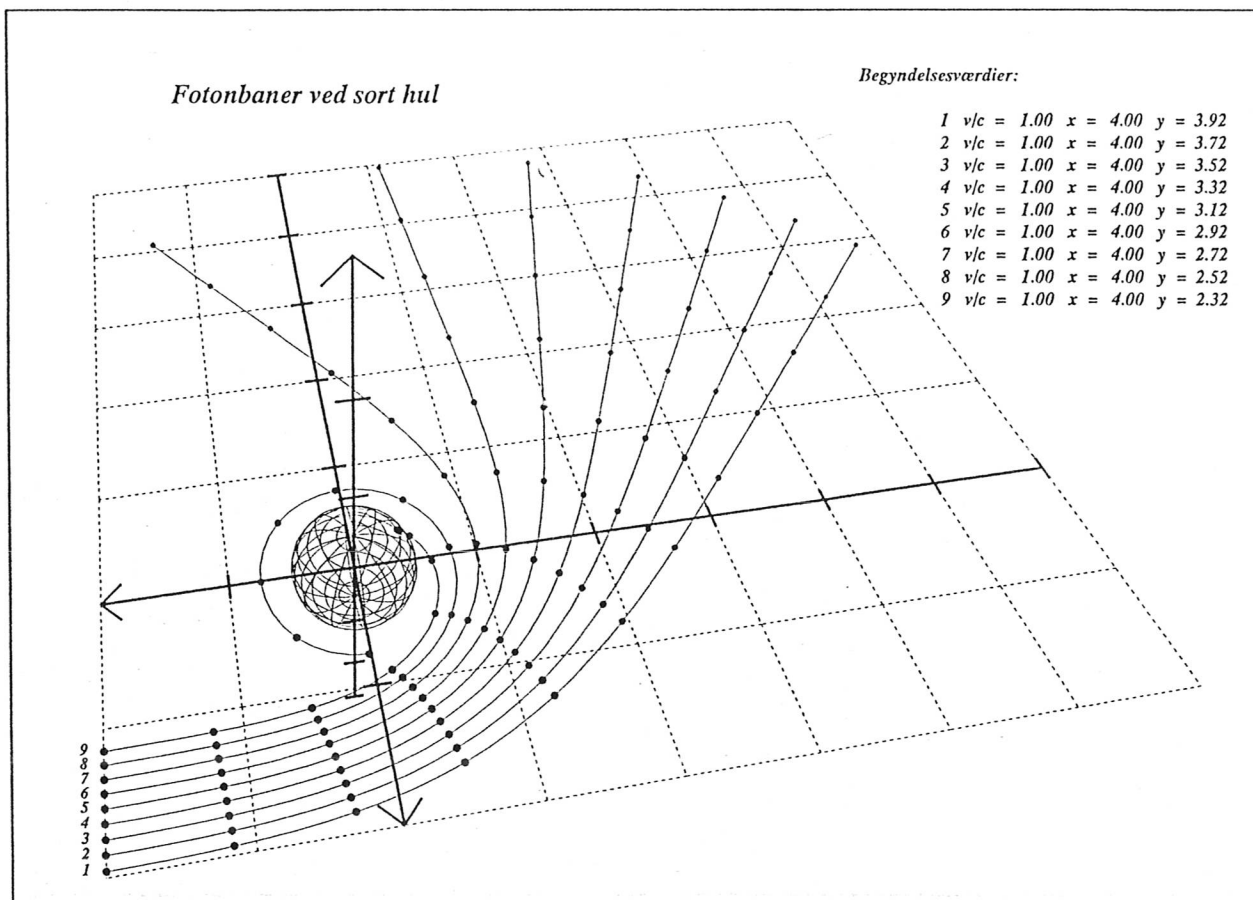


Fig.2.4

Figuren viser en række fotonbaner, der passerer tæt forbi et sort hul. Begivenhedshorisonten for dette er tegnet som en kugle. Tidsintervallet mellem markerede punkter er $\Delta t = 2r_g/c$.

Perihel-drejningen

I modsætning til løsningerne til Newtons bevægelsesligning (1.2) eller (1.12.1) vil der omkring det sorte hul ikke eksistere baner, der ligger fast i rummet, som f.eks. en ellipsebane. De punkter af banen, der er tættest på hullet eller fjernest fra hullet, vil ændre sig for hver "periode" i bevægelsen. Punktet, der ligger fjernest fra hullet (aphel), vil dreje fremad, dvs i samme retning, som partiklen bevæger sig rundt, som det tydeligt fremgår af fig.2.5. Ligeledes punkt, der er tættest på hullet (perihel). Heraf navnet periheldrejning, idet planeternes baner udviser et lignende fænomen – dog langt mindre udtalt end på fig.2.5 p.g.a. det langt svagere tyngdefelt, som planeterne bevæger sig i. Og mest udtalt for Merkur, som er tættest på Solen. Også denne effekt forklares kvantitativt overbevisende ud fra den her behandlede teori!

Bane ved sort hul – periheldrejning

Begyndelsesværdier:

Enhed på kvadratnet (2GM): 5.00
Rotationsparameter a: 0.00
Elektrisk ladning på hul: 0.00
Specifik ladning på testpartikel: 0.00

l v/c = 0.20 x = -10.00 y = 0.00

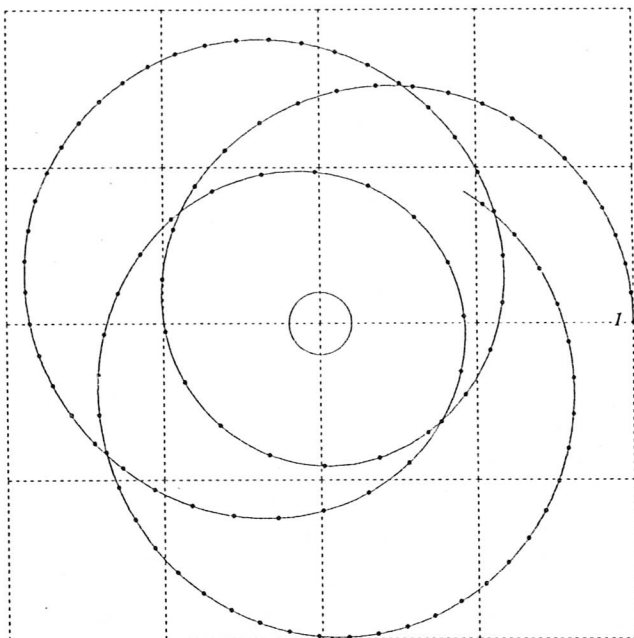


Fig.2.5

Figuren viser periheldrejningen af en bane om det sorte hul. En periode for denne bevægelse er altså mere end en omgang om hullet – altså mere end 360° . Tidsintervallet mellem markerede punkter er $\Delta t = 5r_g/c$.

3. Det roterende sorte hul. Kerr–Newman–geometri.

Til en start af dette kapitel lidt om de enheder, der vil blive brugt fremover for længde, tid, masse, impulsmoment og elektrisk ladning:

- (3.0) (a) Som masseenhed bruges den centrale masse M
 (b) Som længdeenhed bruges Schwarzschild–radius (også kaldet gravitationel radius): $r_g = 2GM/c^2$ – som giver "størrelsen" af det sorte hul, såfremt hullet ikke roterer.
 (c) Som tidsenhed bruges r_g/c – hvor c er lysets fart i det tomme rum. Som følge af (b) og (c) er enheden for fart lig med lysets fart c .
 (d) Impulsmoment, som jo har dimensionen masse gange hastighed gange længde, vil vi bruge enheden $Mc r_g$. Impulsmoment pr. masseenhed får enheden $c r_g$.
 (e) Den elektriske ladning, som har SI–enheden C (Coulomb), vil vi dele med konstanten $c^2 / \sqrt{2G k_c}$, hvor k_c er Coulomb–konstanten $k_c = 8,99 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$. Herved opnås, at den elektriske ladning får dimensionen længde – idet den først omtalte konstant har SI–enheden C/m : $c^2 / \sqrt{2G k_c} = 8,22 \cdot 10^{16} \text{ C/m}$

Det hidtil behandlede tilfælde af et sort hul udtrykt i linielementet (2.1) beskriver et kuglesymmetrisk sort hul. Alle retninger fra $r = 0$ er lige gode – derfor kan (2.1) ikke beskrive den frihedsgrad, som et sort hul også kan have, nemlig rotation – hvis vi antager, at rotationen her indflydelse på metrikken. Og heller ikke den mulige elektriske ladning, et sort hul også kan besidde. En løsning til Einsteins feltligninger, der medtager rotationsfrihedsgraden, blev fundet af R. Kerr i 1963, se f.eks. ref.4 p.240. En løsning, der også medtager muligheden for elektrisk ladning, blev fundet af Newman m.fl. (1965). Denne betegnes derfor Kerr–Newman geometri. Med anvendelse af Boyer – Lindquist koordinater (1967) kan denne geometri beskrives ved linielementet (ref.5 p.877 og 898)

$$(3.1) \quad -c^2 d\tau^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2} [cdt - a \sin^2 \theta d\varphi]^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2)d\varphi - a c dt]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2$$

hvor

$$(3.1.1) \quad \Delta \equiv r^2 - \frac{2MG}{c^2} r + a^2 + Q^2 = r^2 - r_g r + a^2 + Q^2$$

$$(3.1.2) \quad \rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta$$

$$(3.1.3) \quad a \equiv S / (Mc) = \text{impulsmoment pr. masseenhed for hullet} / c$$

Det elektromagnetiske felt, der er associeret med det roterende, elektrisk ladede sorte hul, er givet ved den antisymmetriske tensor F_{ik} :

$$(3.2) \quad F_r = Q\rho^{-4}(r^2 - a^2 \cos^2 \theta) \quad F_{\theta t} = -2Q\rho^{-4}a^2 r \cos \theta \sin \theta$$

$$F_{\varphi r} = Q\rho^{-4}a \sin^2 \theta (r^2 - a^2 \cos^2 \theta) \quad F_{\theta\varphi} = 2Q\rho^{-4}ar(r^2 + a^2) \cos \theta \sin \theta$$

samt de tilsvarende antisymmetriske komponenter. Andre komponenter er 0.

Det vektorpotential, der genererer (3.2), er givet ved

$$(3.3) \quad A_t = -\frac{Qr}{\rho^2} \quad A_r = 0 \quad A_\varphi = \frac{Qr}{\rho^2} a \sin^2 \theta \quad A_\theta = 0$$

Det bemærkes, at (3.2) kan findes som rotationen af vektorpotential (3.3),

$$(3.2.1) \quad F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$$

Et sort hul kan således karakteriseres ved dets masse M , impulsmoment S (eller rotationsparameter a) og elektrisk ladning Q . Ingen andre størrelser er nødvendige. Dette udtrykkes ofte ved, at "et sort hul har ikke hår". Et sort hul er altså ganske enkelt at karakterisere – der er kun 3 parametre.

Sætter vi i (3.1) $a = 0$ og $Q = 0$, ser vi, at vi er tilbage i (1.16). Boyer-Lindquist koordinaterne i (3.1) er derfor en generalisering af Schwarzschild-koordinaterne i (2.1).

Koordinatsystemet, der ligger til grund for metrikken, bryder sammen ved $\Delta = 0$, eller, når denne ligning løses m.h.t. r :

$$(3.4) \quad \text{Horisont:} \quad \Delta = 0 \Leftrightarrow r = r_+ = \frac{1}{2}r_g + \sqrt{\left(\frac{1}{2}r_g\right)^2 - (a^2 + Q^2)}$$

(Minustegnet i løsningsformlen dur ikke, da dette ville give $r = 0$ i tilfældet $a = Q = 0$.)

Betingelsen for eksistensen af horisonten er altså, at

$$(3.5) \quad a^2 + Q^2 \leq \left(\frac{1}{2}r_g\right)^2$$

Dersom der ikke eksisterer en horisont, vil singulariteten i $r = 0$ være synlig for omverdenen, og dette kan vises at give problemer med kausaliteten. Derfor må vi antage, at (3.5) er opfyldt for alle sorte huller. Dette giver en begrænsning på, hvor hurtigt hullet kan rotere. Det antages derfor, at der ikke kan dannes et sort hul, såfremt (3.5) ikke er opfyldt: centrifugalkræfter og elektrisk frastødning vil forhindre dette.

Langt fra det sorte hul (d.v.s. $r \gg 1$) finder vi af (3.1):

$$(3.6) \quad -c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + r^2 d\theta^2$$

Rummet er således langt fra det sorte hul identisk med rummet i den specielle relativitetsteori: Minkowski-rummet, hvor rumgeometrien er Euklidisk.

Af (3.2) finder vi så det elektriske og magnetiske felt på stor afstand fra hullet:

$$(3.7) \quad a) \quad E_r = F_r = \frac{Q}{r^2} + O(r^{-3}) \quad E_\theta = \frac{F_{\theta t}}{r} = O(r^{-4}) \quad E_\varphi = \frac{F_{\varphi t}}{r \sin \theta} = 0$$

$$b) \quad B_r = \frac{F_{\theta\varphi}}{r^2 \sin \theta} = 2 \frac{Qa}{r^3} \cos \theta + O(r^{-4})$$

$$B_\theta = \frac{F_{\varphi r}}{r \sin \theta} = \frac{Qa}{r^3} \sin \theta + O(r^{-4}) \quad B_\varphi = \frac{F_{r\theta}}{r} = 0.$$

Her betyder O størrelsesorden.

Af (3.7a) ser vi, at det elektriske felt ligner feltet fra en punktladning Q . Af (3.7b) ser vi ligeledes, at hullet er omgivet af et magnetisk dipolfelt (som feltet fra en stangmagnet) med magnetisk moment Qa . Det er således rotationen (udtrykt ved a), der skaber det magnetiske felt.

Af (3.1) aflæses den metriske tensor:

$$(3.8) \quad g_{ik} = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} & 0 & \frac{a \sin^2 \theta (\Delta - (r^2 + a^2))}{\rho^2} & 0 \\ 0 & \frac{\rho^2}{\Delta} & 0 & 0 \\ \frac{a \sin^2 \theta (\Delta - (r^2 + a^2))}{\rho^2} & 0 & \frac{\sin^2 \theta ((r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta)}{\rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$$

$$dvs. \quad g_{tt} = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2},$$

$$g_{t\varphi} = \frac{a \sin^2 \theta (\Delta - (r^2 + a^2))}{\rho^2}$$

$$g_{rr} = \frac{\rho^2}{\Delta},$$

$$g_{\varphi\varphi} = \frac{\sin^2 \theta ((r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta)}{\rho^2}$$

$$g_{\theta\theta} = \rho^2$$

Ved differentiation kan det være en fordel at bruge følgende udtryk, der kan vises ud fra (3.1.1) og (3.1.2) og ovenstående:

$$(3.8.1) \quad g_{tt} = -1 + \frac{r - Q^2}{\rho^2} \quad g_{t\varphi} = -\frac{a \sin^2 \theta (r - Q^2)}{\rho^2}$$

$$g_{\varphi\varphi} = \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} \left((\rho^2)^2 + a^2 \sin^2 \theta (\rho^2 + r - Q^2) \right)$$

Til senere brug vil vi også beregne den reciprikke til (3.8):

$$(3.8.2) \quad g^{ik} = \begin{pmatrix} -\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 \Delta} & 0 & \frac{a(\Delta - (r^2 + a^2))}{\rho^2 \Delta} & 0 \\ 0 & \frac{\Delta}{\rho^2} & 0 & 0 \\ \frac{a(\Delta - (r^2 + a^2))}{\rho^2 \Delta} & 0 & \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 \Delta \sin^2 \theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho^2} \end{pmatrix}$$

altså er

$$g^{tt} = -\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 \Delta} \quad g^{t\varphi} = \frac{a(\Delta - (r^2 + a^2))}{\rho^2 \Delta}$$

$$g^{rr} = \frac{\Delta}{\rho^2} \quad g^{\varphi\varphi} = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 \Delta \sin^2 \theta} \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{\rho^2}$$

Som i Schwarzschild-geometrien er den statiske grænse (grænsen, hvor det anvendte statiske koordinatsystem ikke længere er hensigtsmæssigt – såfremt koordinatsystemet ikke ønskes at bevæge sig hurtigere end lyset) givet ved betingelsen $g_{tt} > 0$. Begrundelsen for dette er følgende: betragt en statisk iagttagere, dvs. en iagttagere med faste værdier af r , φ , θ . Af (3.1) finder vi så egentiden for denne iagttagere:

$$d\tau^2 = (-g_{tt}) dt^2$$

Denne ligning har ingen løsning for $d\tau$, medmindre $(-g_{tt}) > 0$. Derfor kan ingen iagttagere være i hvile i et område, hvor denne ligning ikke er opfyldt.

Heraf findes:

(3.9) Statisk grænse:

$$g_{tt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = r_0 = \frac{1}{2}r_g + \sqrt{\left(\frac{1}{2}r_g\right)^2 - Q^2 - a^2 \cos^2 \theta}$$

Området mellem horisonten r_+ givet ved (3.4) og den statiske grænse r_0 i (3.9) kaldes ergosfæren – eller arbejds-sfæren. Dette navn er begrundet i følgende proces: en partikel bevæger sig i ergosfæren og splittes op i to – den ene "droppes" i hullet med *negativ* energi – og herved kan den anden opnå at få større energi end den oprindelige partikel havde. Denne udvundne energi tages fra hullets rotationsenergi. Således kan hullet levere energi til sine omgivelser. Processen kaldes *Penrose-processen*. Se ref.5 p. 904.

Ergosfæren ses afbildet på fig.3.1 nedenfor.

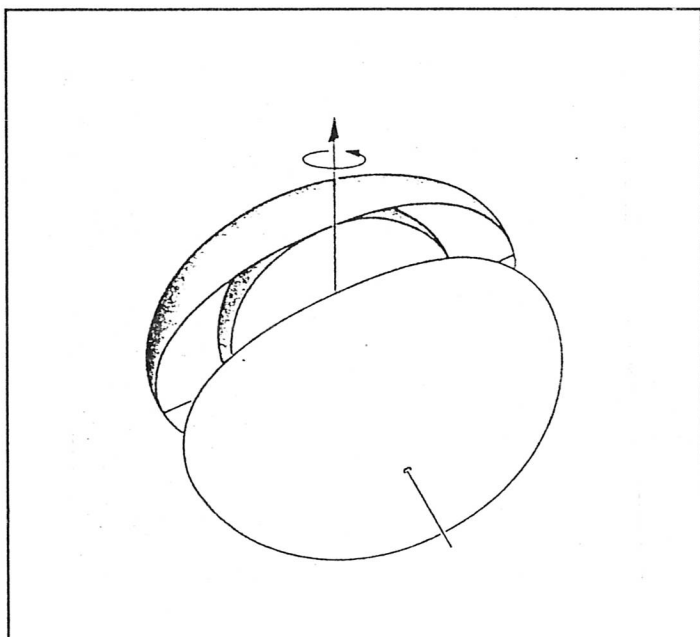


Fig.3.1

Figuren illustrerer, hvad der kaldes ergosfæren: området mellem den statiske grænse og begivenhedshorisonten. Et sådant område findes kun for et roterende sort hul ($a \neq 0$). Figuren er taget fra ref.5.

Tvungen rotation

I ergosfæren kan ingen iagttagere forblive i hvile i forhold til det anvendte koordinatsystem (i forhold til fix-stjernerne). Hullets rotation vil bevirke, at alle inertialsystemer trækkes med rundt: det er ikke længere det store omgivende univers, der definerer, hvad rotation er.

Det fremgår af følgende betragtning:

For partikler, der bevæger sig med lyshastigheden, er egentiden $d\tau = 0$. For langsommere partikler er $d\tau > 0$. Vi ser herefter på en partikel/iagttagere, hvor r og θ er konstante. Af (3.1) finder vi så:

$$(3.10) \quad d\tau > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\Delta}{\rho^2} [dt - a \sin^2 \theta d\varphi]^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2)d\varphi - a dt]^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \Omega_{\min} < \omega < \Omega_{\max}$$

med definitionen $\omega \equiv \frac{d\varphi}{dt}$, og hvor

$$\Omega_{\min} = \frac{a - \frac{\sqrt{\Delta}}{\sin \theta}}{r^2 + a^2 - \sqrt{\Delta} a \sin \theta}, \quad \Omega_{\max} = \frac{a + \frac{\sqrt{\Delta}}{\sin \theta}}{r^2 + a^2 + \sqrt{\Delta} a \sin \theta}$$

Det er i ovenstående forudsat, at $a > 0$.

Det interessante er her, at Ω_{\min} kan blive positiv (ligesom Ω_{\max} er det). Betingelsen for dette er

$$(3.11) \quad \Omega_{\min} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a > \frac{\sqrt{\Delta}}{\sin \theta} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta - a^2 \sin^2 \theta < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-g_{tt}) < 0$$

Dette er ifølge (3.9) ensbetydende med, at vi befinder os inden for ergosfæren! I denne er hvile altså ikke mulig – alt og alle tvinges med rundt i hullets rotationsretning med en vinkelhastighed, der mindst er Ω_{\min} .

Ved horisonten er $\Delta=0$, og Ω_{\min} og Ω_{\max} bliver identiske. Her er der derfor kun *en* mulig vinkelhastighed, og denne er

$$(3.12) \quad \text{På horisonten: } \omega = \Omega_{\min} = \Omega_{\max} = \frac{a}{r^2 + a^2} \quad \text{med } r = r_+ \text{ givet ved (3.4)}$$

Antager vi eksempelvis, at $a = 1/2$, $Q = 0$ og at hullets masse er en solmasse, finder vi af (3.12):

$$(3.13) \quad a = 1/2, Q = 0, M = M_{\text{sol}}: \omega_{\text{horisont}} = \frac{1/2}{(1/2)^2 + (1/2)^2} = 1 = \frac{1}{r_g / c} = \frac{300.000 \text{ km/s}}{3 \text{ km}} = 100.000 \text{ rad/s}$$

Dette er en ganske betragtelig rotationshastighed. Den tilsvarende rotationsfrekvens er 15,9 kHz!

Men så er det altså også den øvre grænse for dette huls rotation ($a=1/2$).

På grund af hullets rotation er det her anvendte koordinatsystem ikke det simpleste at anvende, når fysiske processer i rummet omkring hullet skal analyseres. I stedet for anvendes ofte systemet, der roterer med hullet med ω givet ved gennemsnittet af Ω_{\min} og Ω_{\max} :

$$(3.14) \quad \omega_{\text{stationær}} = 1/2(\Omega_{\min} + \Omega_{\max}) = \frac{a[r^2 + a^2 - \Delta]}{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta} = -\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}}$$

Den sidste ligning verificeres let ved at sammenligne med (3.8).

Rumlig metrik. En partikels koordinatfart og fysiske fart.

Det fremgår af (3.8), at det anvendte koordinatsystem ikke længere er "tidsortogonal", dvs. der i metrikken optræder blandingsled mellem rum og tid, her synliggjort ved størrelsen $g_{t\varphi}$. Det forårsager tilstedeværelsen af Corioliskræfter i det anvendte koordinatsystem, se ref.6 p.283 og 374. Men det betyder også, at den rumlige geometri ikke blot er givet ved den rumlige del af (3.8), men derimod ved ligningen

$$(3.15) \quad \gamma_{\iota\kappa} = g_{\iota\kappa} + \gamma_{\iota} \gamma_{\kappa} \quad \text{hvor} \quad \gamma_{\iota} = \frac{g_{\iota t}}{\sqrt{(-g_{tt})}}$$

Se iverigt ref.6 p.269. Her kan indices ι og κ antage de tre værdier r, φ, θ . Vi finder således af (3.8):

$$(3.16) \quad \gamma_{\iota\kappa} = \begin{pmatrix} \frac{\rho^2}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \frac{\Delta}{(-g_{tt})} & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{altså} \quad \gamma_{rr} = \frac{\rho^2}{\Delta}, \quad \gamma_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta \frac{\Delta}{(-g_{tt})}, \quad \gamma_{\theta\theta} = \rho^2$$

En rumlig afstand er så givet ved

$$(3.17) \quad ds^2 = \gamma_{\iota\kappa} dx^{\iota} dx^{\kappa} = \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \sin^2 \theta \frac{\Delta}{(-g_{tt})} d\varphi^2 + \rho^2 d\theta^2$$

hvor der summeres over de *rumlige* indices ι og κ . Heraf findes en partikels koordinatfart v_{ι} :

$$(3.18) \quad v_{\iota}^2 \equiv \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \gamma_{\iota\kappa} \frac{dx^{\iota}}{dt} \frac{dx^{\kappa}}{dt} = \frac{\rho^2}{\Delta} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \sin^2 \theta \frac{\Delta}{(-g_{tt})} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \rho^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

Ulempen ved denne fart er, at den er afhængig af det koordinatsystem, vi bruger, idet t naturligvis kunne tænkes erstattet af en anden tidsparameter.

Dette problem kan løses ved at bemærke, at egentiden $d\tau$ kan omskrives på følgende måde:

$$(3.19) \quad d\tau^2 \equiv -g_{ik} dx^i dx^k = (\sqrt{-g_{tt}} dt - \gamma_{\iota} dx^{\iota})^2 - ds^2$$

hvor γ_{ι} er givet ved (3.15) og ds^2 er givet ved (3.17). Det sidste lighedstegn kan verificeres ved simpel indsættelse.

For at få et udtryk for farten, der er uafhængig af den anvendte tidsparameter t , benytter vi i stedet for tiden dt følgende, sammenlign med (3.19) (se ref.6 p.373):

$$(3.20) \quad d\hat{t} = \sqrt{-g_{tt}} dt - \gamma_{t\varphi} dx^\varphi = \sqrt{-g_{tt}} dt - \gamma_{t\varphi} d\varphi$$

Denne tidstilvækst er tiden mellem to begivenheder målt i et inertialsystem, der er i (øjeblikkelig) hvile i forhold til det anvendte koordinatsystem (r, φ, θ) . Med denne definition bliver (3.19):

$$(3.19.1) \quad -d\tau^2 = -(d\hat{t})^2 + ds^2$$

Den herved fremkomne fart bliver så:

$$(3.21) \quad \beta \equiv \frac{ds}{d\hat{t}} = \frac{\frac{ds}{dt}}{\sqrt{(-g_{tt})} - \gamma_{t\varphi} \frac{dx^\varphi}{dt}} = \frac{\frac{ds}{dt}}{\sqrt{(-g_{tt})} - \gamma_{t\varphi} \frac{d\varphi}{dt}}$$

Her er ds/dt givet ved (3.18). Lysets fart er i dette inertialsystem med ovenstående definition lig 1, se (3.19.1) med $d\tau = 0$. Derfor er β partiklens fysiske fart – målt i forhold til lysets fart – målt af en lokal inertiel iagttager.

Lysets koordinatfart $v_t = ds/dt$ defineret ved (3.18) kan findes fra (3.1), idet $d\tau = 0$ for lys.

$$(3.22) \text{ For lys: } c_t = \frac{\sqrt{-g_{tt}}}{1 + \gamma_{t\varphi} e^\varphi} = \frac{\sqrt{-g_{tt}}}{1 + \gamma_{t\varphi} e^\varphi}$$

hvor e^φ er komponenterne af en enhedsvektor i bevægelsens retning, dvs.

$$(3.23) \quad \gamma_{\varphi\varphi} e^\varphi e^\varphi = 1$$

Dette kan vises ved at sætte lysets hastighedskomponenter $c_t^\varphi = c_t e^\varphi$ ind i formlen (3.19) med $d\tau=0$ og $ds/dt = c_t$.

Man ser således, at lysets koordinatfart er afhængig af retningen.

Begyndelsesbetingelser

Givet et valgt begyndelsessted (r, φ, θ) . Desuden en valgt bevægelsesretning givet ved ikke-normerede koordinater

$$w^r = \sqrt{\gamma_{rr}} \frac{dr}{dt} \quad w^\varphi = \sqrt{\gamma_{\varphi\varphi}} \frac{d\varphi}{dt} \quad w^\theta = \sqrt{\gamma_{\theta\theta}} \frac{d\theta}{dt}$$

og farten β . Vi indsætter de ikke-normerede hastighedskoordinater i (3.18) og finder den ikke normerede koordinatfart v_t : $v_t^2 = (w^r)^2 + (w^\varphi)^2 + (w^\theta)^2$. Herefter finder vi komponenterne e^φ for en enhedsvektor i bevægelsens retning (koordinatsystem $(dr, d\varphi, d\theta)$, vektoren opfylder (3.23)):

$$e^r = \frac{w^r}{v_t \sqrt{\gamma_{rr}}} \quad e^\varphi = \frac{w^\varphi}{v_t \sqrt{\gamma_{\varphi\varphi}}} \quad e^\theta = \frac{w^\theta}{v_t \sqrt{\gamma_{\theta\theta}}}$$

For at finde partiklens koordinathastighedskomponenter ganger vi denne enhedsvektor med en (endnu) ukendt konstant k :

$$(3.24) \quad \frac{dx^i}{dt} = k e^i$$

Disse komponenter indsættes endelig i (3.21), hvorefter k kan beregnes:

$$(3.25) \quad \beta = \frac{k}{\sqrt{(-g_{tt}) - \gamma_{tt} k e^t}} = \frac{k}{\sqrt{(-g_{tt}) - \gamma_{\varphi\varphi} k e^\varphi}}$$

hvoraf

$$(3.26) \quad k = \frac{\beta \sqrt{-g_{tt}}}{1 + \beta \gamma_{tt} e^t} = \frac{\beta \sqrt{-g_{tt}}}{1 + \beta \gamma_{\varphi\varphi} e^\varphi}$$

Nu giver (3.24) partiklens koordinathastighedskomponenter.

Bevægelseskonstanter

Der er tre oplagte bevægelseskonstanter: da den metriske tensor er tidsuafhængig, er partiklens energi pr. masseenhed E konstant, og da den metriske tensor ikke afhænger af vinklen φ (aksialsymmetri), er partiklens projektion af impulsmoment på rotationsaksen (pr. masseenhed) J_z også en bevægelseskonstant. Endelig er partiklens masse m konstant. Overraskende nok er der en fjerde bevægelseskonstant associeret med bevægelsen i vinklen θ , K_θ .

Disse bevægelseskonstanter kan findes ved anvendelse af Hamilton-formalisme, som ikke vil blive gennemgået her. Se evt. ref.5 p.897-899.

Partiklens energi pr. masseenhed E er givet ved (q er partiklens elektriske ladning):

$$(3.27) \quad E = -g_{ik} \frac{dx^k}{d\tau} - \frac{q}{m} A_t = (-g_{tt}) \frac{dt}{d\tau} - g_{t\varphi} \frac{d\varphi}{d\tau} - \frac{q}{m} A_t = \left[-g_{tt} - g_{t\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \right] \frac{dt}{d\tau} - \frac{q}{m} A_t$$

Her er τ egentiden for bevægelsen, således at τ opfylder (se (3.1)):

$$(3.28) \quad g_{ik} dx^i dx^k = -d\tau^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{-g_{ik} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt}}}$$

Hvis vi sammenholder definitionen af β (3.21) med ligning (3.19) for egentiden $d\tau$, finder vi af (3.27):

$$(3.27.1) \quad E = \sqrt{\frac{(-g_{tt})}{1-\beta^2}} - \frac{q}{m} A_t$$

Desuden er impulsmomentkomponenten pr. masseenhed J_z givet ved

$$(3.29) \quad J_z = g_{\varphi k} \frac{dx^k}{d\tau} + \frac{q}{m} A_\varphi = g_{\varphi\varphi} \frac{d\varphi}{d\tau} + g_{\varphi t} \frac{dt}{d\tau} + \frac{q}{m} A_\varphi = \left[g_{\varphi\varphi} \frac{d\varphi}{dt} + g_{\varphi t} \right] \frac{dt}{d\tau} + \frac{q}{m} A_\varphi$$

Vi ser på dette udtryk i det specialtilfælde, hvor partiklen ingen elektrisk ladning har ($q = 0$). Antager vi yderligere, at partiklen er i hvile i koordinatsystemet (r, φ, θ) , ser vi af (3.29), at $J_z \neq 0$! Følger partiklen derimod hullets rotation med vinkelhastigheden $\omega_{stationær}$ givet ved (3.14), ser vi af (3.29), at $J_z = 0$!

Endelig er konstanten associeret med den variable θ givet ved

$$(3.30) \quad K_\theta = \left(\rho^2 \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + \cos^2 \theta \left[a^2 (1 - E^2) + \frac{J_z^2}{\sin^2 \theta} \right] = \left(\rho^2 \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + \cos^2 \theta \left[a^2 (1 - E^2) + \frac{J_z^2}{\sin^2 \theta} \right]$$

Det bemærkes, at disse bevægelseskonstanter ikke er brugbare for partikler med lysets fart, idet parametertilvæksten $d\tau = 0$ for disse. Hvis $Q = 0$, er der dog *en* bevægelseskonstant, vi kan benytte også for partikler med lyshastigheden, nemlig

$$(3.29.1) \quad Q = 0: \quad \frac{J_z}{E} = \frac{g_{\varphi\varphi} \frac{d\varphi}{dt} + g_{\varphi t}}{-g_{tt} - g_{t\varphi} \frac{d\varphi}{dt}}$$

Disse bevægelseskonstanter kan bruges til at integrere bevægelsesligningerne fra 2. ordens differentialligninger til nogle tilsvarende 1.ordens, se næste afsnit. De kan også benyttes til at kontrollere, om en numerisk løsning af 2.ordens differentialligningerne er udført korrekt, idet de ovennævnte udtryk kan udregnes i hvert beregnet punkt af partiklens bane. Indenfor integrationsnøjagtigheden skal hvert udtryk give samme tal i hvert banepunkt.

Bevægelsesligninger

Bevægelsesligningerne for en testpartikel påvirket af gravitationskræfter og elektromagnetiske kræfter fra det roterende, elektrisk ladede sorte hul, er givet ved (ref.5, p.898):

$$(3.31) \quad \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} = \frac{q}{m} F^i_n \frac{dx^n}{d\tau}$$

Her er den elektromagnetiske felt-tensor F^i_n givet ved

$$(3.32) \quad F^i_n = g^{il} F_{ln},$$

hvor F_{ln} er givet ved (3.2) og Γ^i_{jk} skal beregnes ud fra (1.9).

Skrevet i større detalje lyder (3.31):

$$(3.33) \quad \begin{aligned} a) \quad & \frac{d^2 r}{d\tau^2} + \Gamma^r_{jk} \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} = \frac{q}{m} \left[g^{rr} \left(F_{rt} \frac{dt}{d\tau} + F_{r\varphi} \frac{d\varphi}{d\tau} \right) \right] \\ b) \quad & \frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} + \Gamma^{\varphi}_{jk} \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} = \frac{q}{m} \left[g^{\varphi t} \left(F_{tr} \frac{dr}{d\tau} + F_{t\theta} \frac{d\theta}{d\tau} \right) + g^{\varphi\varphi} \left(F_{\varphi r} \frac{dr}{d\tau} + F_{\varphi\theta} \frac{d\theta}{d\tau} \right) \right] \\ c) \quad & \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \Gamma^{\theta}_{jk} \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} = \frac{q}{m} \left[g^{\theta\theta} \left(F_{\theta t} \frac{dt}{d\tau} + F_{\theta\varphi} \frac{d\varphi}{d\tau} \right) \right] \\ d) \quad & \frac{d^2 t}{d\tau^2} + \Gamma^t_{jk} \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} = \frac{q}{m} \left[g^{tt} \left(F_{tr} \frac{dr}{d\tau} + F_{t\theta} \frac{d\theta}{d\tau} \right) + g^{t\varphi} \left(F_{\varphi r} \frac{dr}{d\tau} + F_{\varphi\theta} \frac{d\theta}{d\tau} \right) \right] \end{aligned}$$

Nu skal vi blot have beregnet Γ - symbolerne. Af formel (1.9) samt (3.8) og (3.8.1) finder vi:

$$(3.34a) \quad \Gamma_{tt}^r = -\frac{1}{2}g^{rr} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \quad \Gamma_{t\varphi}^r = -\frac{1}{2}g^{rr} \frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial r} \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2}g^{rr} \frac{\partial g_{rr}}{\partial r}$$

$$\Gamma_{r\theta}^r = \frac{1}{2}g^{rr} \frac{\partial g_{rr}}{\partial \theta} \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -\frac{1}{2}g^{rr} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{1}{2}g^{rr} \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r}$$

$$(3.34b) \quad \Gamma_{tr}^{\varphi} = \frac{1}{2} \left(g^{r\varphi} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} + g^{\varphi\varphi} \frac{\partial g_{\varphi t}}{\partial r} \right) \quad \Gamma_{r\theta}^{\varphi} = \frac{1}{2} \left(g^{r\varphi} \frac{\partial g_{tt}}{\partial \theta} + g^{\varphi\varphi} \frac{\partial g_{\varphi t}}{\partial \theta} \right)$$

$$\Gamma_{r\varphi}^{\varphi} = \frac{1}{2} \left(g^{r\varphi} \frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial r} + g^{\varphi\varphi} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} \right) \quad \Gamma_{\varphi\theta}^{\varphi} = \frac{1}{2} \left(g^{r\varphi} \frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial \theta} + g^{\varphi\varphi} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} \right)$$

$$(3.34c) \quad \Gamma_{tt}^{\theta} = -\frac{1}{2}g^{\theta\theta} \frac{\partial g_{tt}}{\partial \theta} \quad \Gamma_{t\varphi}^{\theta} = -\frac{1}{2}g^{\theta\theta} \frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial \theta} \quad \Gamma_{rr}^{\theta} = -\frac{1}{2}g^{\theta\theta} \frac{\partial g_{rr}}{\partial \theta}$$

$$\Gamma_{r\theta}^{\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta} \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^{\theta} = -\frac{1}{2}g^{\theta\theta} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} \quad \Gamma_{\theta\theta}^{\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta} \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \theta}$$

$$(3.34d) \quad \Gamma_{tr}^t = \frac{1}{2} \left(g^{tt} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} + g^{t\varphi} \frac{\partial g_{\varphi t}}{\partial r} \right) \quad \Gamma_{r\theta}^t = \frac{1}{2} \left(g^{tt} \frac{\partial g_{tt}}{\partial \theta} + g^{t\varphi} \frac{\partial g_{\varphi t}}{\partial \theta} \right)$$

$$\Gamma_{r\varphi}^t = \frac{1}{2} \left(g^{t\varphi} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} + g^{tt} \frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial r} \right) \quad \Gamma_{\varphi\theta}^t = \frac{1}{2} \left(g^{tt} \frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial \theta} + g^{t\varphi} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} \right)$$

I disse ligninger optræder 10 forskellige partielle afledede m.h.t. r og θ ad de 5 g_{ik} - led:

$$(3.35) \quad \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} = \frac{\rho^2 - 2r(r - Q^2)}{\rho^4} \quad \frac{\partial g_{tt}}{\partial \theta} = 2a^2 \sin \theta \cos \theta \frac{r - Q^2}{\rho^4}$$

$$\frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial r} = -a \sin^2 \theta \frac{\rho^2 - 2r(r - Q^2)}{\rho^4} \quad \frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial \theta} = -2a \sin \theta \cos \theta \frac{(r - Q^2)(r^2 + a^2)}{\rho^4}$$

$$\frac{\partial g_{rr}}{\partial r} = \frac{2r(\Delta - \rho^2) + \rho^2}{\Delta^2} \quad \frac{\partial g_{rr}}{\partial \theta} = -2a^2 \sin \theta \cos \theta \frac{1}{\Delta}$$

$$\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} = \sin^2 \theta \frac{2r\rho^4 + a^2 \sin^2 \theta (\rho^2 - 2r(r - Q^2))}{\rho^4}$$

$$\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} = 2 \sin \theta \cos \theta \frac{(r^2 + a^2)\rho^4 + a^2 \sin^2 \theta (r - Q^2)(2\rho^2 + a^2 \sin^2 \theta)}{\rho^4}$$

$$\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} = 2r \quad \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \theta} = -2a^2 \sin \theta \cos \theta$$

Herefter kan samtlige 20 forskellige Γ - symboler beregnes. Det bemærkes, at det er relativt billigt sluppet med 20 stk., idet der principielt kunne være 40 forskellige Γ - symboler.

I de numeriske beregninger ønsker vi at have t - altså tiden for den fjerne iagttaget - som parameter. Til dette formål bemærker vi, at

$$(3.36.1) \quad \frac{d^2}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} \right) = \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \frac{d^2}{dt^2} + \frac{d^2 t}{d\tau^2} \frac{d}{dt}$$

Herefter benyttes ligning (3.33d) til at bortskaffe leddet $\frac{d^2 t}{d\tau^2}$, altså ses af (3.36):

$$(3.36.2) \quad \frac{d^2}{d\tau^2} = \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \frac{d^2}{dt^2} + \left(-\Gamma_{jk}^t \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} + \frac{q}{m} F_{jn}^t \frac{dx^n}{d\tau} \right) \frac{d}{dt}$$

Heraf fås så

$$(3.37) \quad \frac{d^2}{d\tau^2} = \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \frac{d^2}{dt^2} + \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \left(-\Gamma_{jk}^t \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} + \frac{q}{m} F_{jn}^t \frac{dx^n}{dt} \frac{d\tau}{dt} \right) \frac{d}{dt}$$

Dette sidste indføres i ligningerne (3.33 a-c), og de fremkomne ligninger multipliceres med $\left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2$.

Størrelsen $\frac{dt}{d\tau}$ beregnes af (3.28).

De herved fremkomne ligninger vil herefter få udseendet

$$(3.38) \quad \frac{d^2 x^l}{dt^2} + \left(-\Gamma_{jk}^l \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} + \frac{q}{m} F_{jn}^l \frac{dx^n}{dt} \frac{d\tau}{dt} \right) \frac{dx^l}{dt} + \Gamma_{jk}^l \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = \frac{q}{m} F_{jn}^l \frac{dx^n}{dt} \frac{d\tau}{dt}$$

hvor x^l er en af de rumlige variable r, φ, θ . Ved numerisk løsning af disse ligninger isoleres den 2. afledede af de rumlige variable. Endelig omskrives de herved fremkomne 3 2.ordens differential-ligninger til 6 koblede 1.ordens differentiaalligninger – efter samme recept som nævnt i kapitel 1.

Det er af interesse at notere, at (3.38) også er brugbar for partikler, der bevæger sig med lyshastigheden, idet tilvæksten i egentid $d\tau=0$ for disse, og dermed falder de led i (3.38), der vedrører den elektromagnetiske felttensor, ud.

Ved en teoretisk analyse af partiklers baner i rummet omkring det sorte hul kan man ved hjælp af de tidligere omtalte bevægelseskonstanter opnå følgende 1.ordens differentiaalligninger (Carter, 1968, se ref.5 p.897):

$$(3.39) \quad \begin{aligned} a) \quad & \rho^2 \frac{dr}{d\tau} = \pm \sqrt{R} \\ b) \quad & \rho^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = - \left(aE - \frac{J_z}{\sin^2 \theta} \right) + \frac{aP}{\Delta} \\ c) \quad & \rho^2 \frac{d\theta}{d\tau} = \pm \sqrt{\Theta} \\ d) \quad & \rho^2 \frac{dt}{d\tau} = -a(aE \sin^2 \theta - J_z) + (r^2 + a^2) \frac{P}{\Delta} \end{aligned}$$

Her er

$$(3.40) \quad \begin{aligned} a) \quad & P = E(r^2 + a^2) - J_z a - \frac{q}{m} Qr \\ b) \quad & R = P^2 - \Delta \left[r^2 + (J_z - aE)^2 + K_\theta \right] \\ c) \quad & \Theta = K_\theta - \cos^2 \theta \left[a^2(1 - E^2) + \frac{J_z^2}{\sin^2 \theta} \right] \end{aligned}$$

Disse bevægelsesligninger er imidlertid ikke let anvendelige ved numeriske metoder, idet fortegnsskift i (3.39a) og (3.39c) ikke er let at indpasse i algoritmen.

Jævn cirkelbevægelse

Også i dette tilfælde vil vi se på den enkle bevægelse, som består i bevægelse med konstant fart i planen med ligningen $\theta = \pi/2$. Her er det kun den variable φ , der ændrer sig med tiden. Vi forudsætter i det følgende, at partiklens elektriske ladning q er 0, samt at hullets elektriske ladning Q også er 0. Bevægelsesligningen fås af (3.38) og (3.34):

$$(3.41) \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r \omega^2 + 2\Gamma_{t\varphi}^r \omega + \Gamma_{tt}^r = 0 \quad \text{hvor} \quad \omega \equiv \frac{d\varphi}{dt}$$

Videre finder vi så af (3.34) og (3.35):

$$(3.42) \quad \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} \omega^2 + 2 \frac{\partial g_{t\varphi}}{\partial r} \omega + \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} = 0, \quad \text{hvoraf}$$

$$\frac{2r^3 - a^2}{r^2} \omega^2 + 2 \frac{a}{r^2} \omega - \frac{1}{r^2} = 0$$

De to løsninger til denne er

$$(3.43) \quad \omega_{\pm} = \frac{-a \pm r\sqrt{2r}}{2r^3 - a^2} = \frac{\pm 1}{r\sqrt{2r} \pm a}$$

Til en given radius er der altså to forskellige vinkelhastigheder for jævn cirkelbevægelse: en hastighed *med* hullets rotation: ω_+ , en *modsat*: ω_- .

På figur 3.1 nedenfor ses disse to vinkelhastigheder afbildet som funktion af r i tilfældet $a = \frac{1}{2}$, de fuldt optrukne grafer. På denne figur er desuden vist den størst og mindst mulige vinkelhastighed som funktion af r (naturligvis også i tilfældet $a = \frac{1}{2}$), nemlig Ω_{\max} og Ω_{\min} fra (3.10), de med kryds markerede grafer. Man ser, at jævn cirkelbevægelse i hullets rotationsretning er mulig helt ind til begivenhedshorizonten $r = \frac{1}{2}$, hvorimod jævn cirkelbevægelse mod hullets rotation kun er mulig for $r \geq 2$.

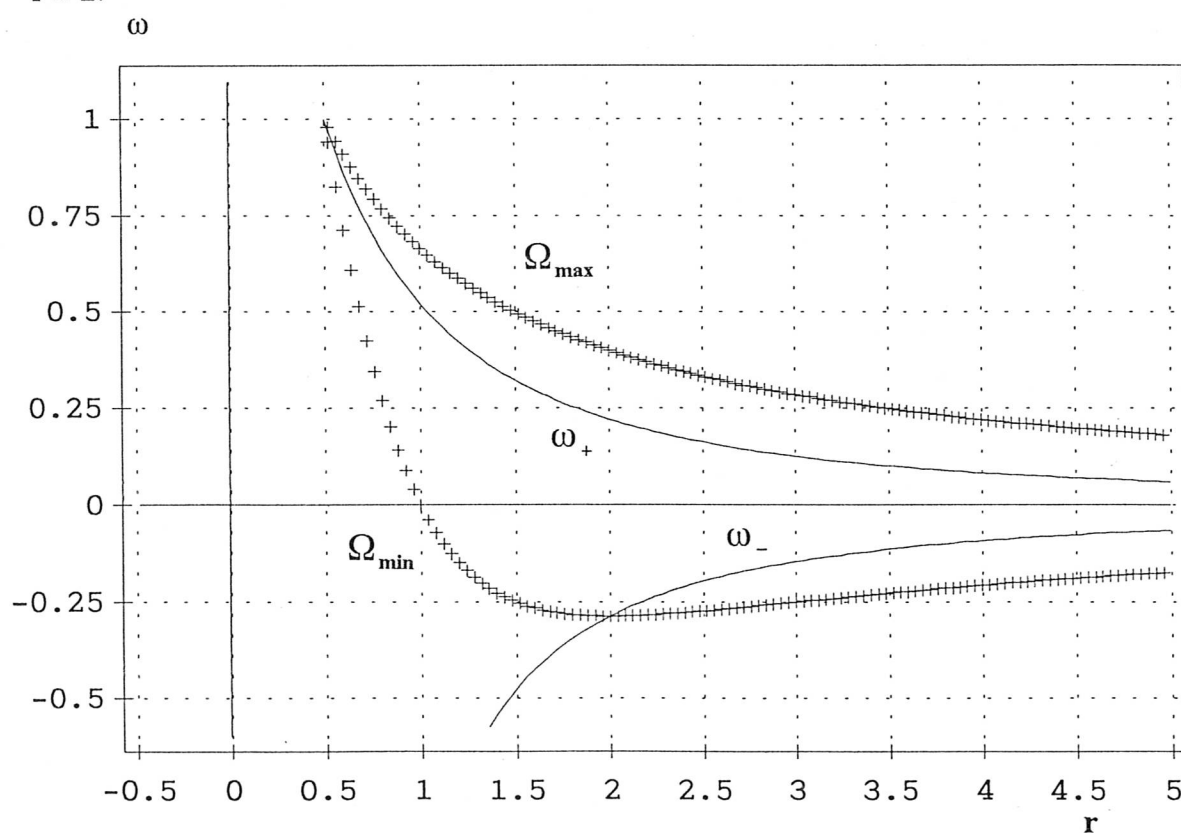


fig.3.2

De fuldt optrukne kurver viser vinkelhastigheden med og modhullets rotationsretning for jævn cirkelbevægelse. De grænser for vinkelhastigheden, der er betinget af, at partiklen skal bevæges langsommere end lyset, er også indtegnet (grafer markeret med krydser)

Af (3.43) kan vi så beregne farten β ved hjælp af (3.21):

$$(3.44) \quad \beta = \frac{\frac{ds}{dt} \sqrt{-g_{tt}}}{-g_{tt} - g_{t\varphi} \omega} = \frac{\sqrt{\Delta} |\omega|}{-g_{tt} - g_{t\varphi} \omega} = \frac{\sqrt{r^2 - r + a^2} |\omega|}{1 - \frac{1}{r} - \frac{a\omega}{r^2}}$$

Her har vi benyttet (3.15), (3.16) og (3.17).

Indsættes (3.43) så i (3.44), kan β beregnes. Nedenfor er de to funktioner β_+ og β_- vist som funktion af r for $a = \frac{1}{2}$. Plus og minus refererer til fortegnene i (3.43). Plus er cirkelbevægelse i retning af hullets rotation, minus er modsat.

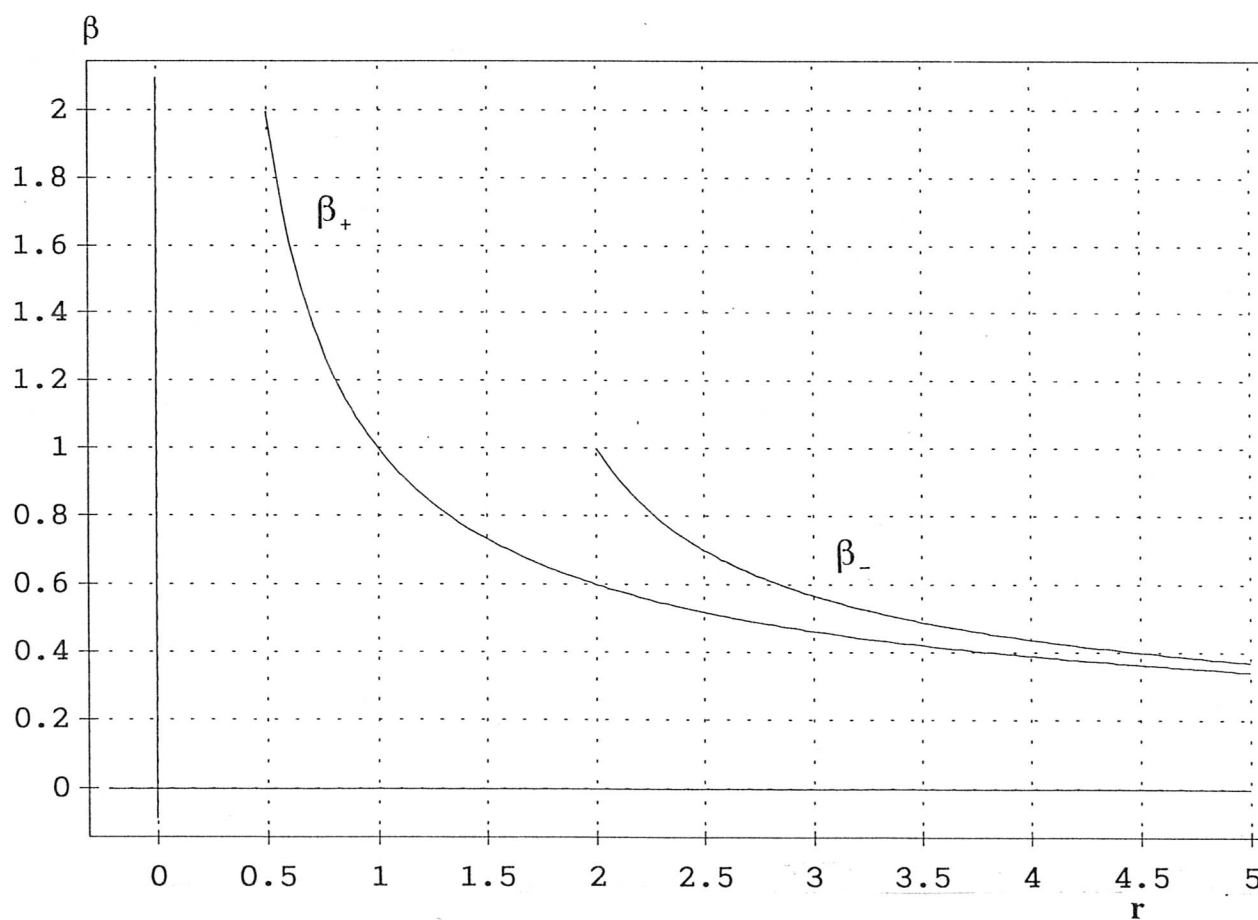


Fig.3.3

Figuren viser farten β for jævn cirkelbevægelse i planen $\theta = \pi/2$ for $a = \frac{1}{2}$. De to grafer viser farten henholdsvis med og mod hullets rotation.

Ved betragtning af figuren er det vigtigt at bemærke, at ergosfæren i planen $\theta = \pi/2$ er området mellem $r = 1/2$ og $r = 1$, se (3.4) og (3.9). I dette område kan vi ikke forvente, at $\beta < 1$, idet koordinatsystemet "bevæger sig hurtigere end lyset", se afsnittet om tvungen rotation samt den foregående figur. Uden for ergosfæren er kravet til β derimod det velkendte: $\beta < 1$. Figuren viser, at jævn cirkelbevægelse i hullets rotationsretning er mulig helt ind til begivenhedshorizonten $r = 1/2$. Derimod er jævn cirkelbevægelse modsat hullets rotationsretning kun mulig for $r \geq 2$. Dette sidste indsættes let ved at indsætte $r = 2$ og $a = 1/2$ i (3.43) (brug minustegnet!) og så indsætte denne i (3.44).

De *stabile* cirkelbevægelser (stabil betyder her, at en lille ændring af partiklens fart ikke vil betyde radikale ændringer i banen, som f.eks. at partiklen bevæger sig mod $r = \infty$ eller falder mod begivenhedshorizonten), der er tættest på hullet, foregår i hullets rotationsretning med $r = 1/2$, modsat hullets rotationsretning med $r = 4 1/2$ (se f.eks. ref.7 p.63–65). En testpartikels energi i disse baner kan findes af (3.27a) med $q = 0$, $a = 1/2$ og $\theta = \pi/2$. Vi får:

(3.45) Cirkelbevægelse med hullets rotation, $a = 1/2$, $r = 1/2$:

$$E_+ = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{r}}{1 - \beta^2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{1/2}}{1 - 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Cirkelbevægelse mod hullets rotation, $a = 1/2$, $r = 4 1/2$:

$$E_- = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{r}}{1 - \beta^2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{4,5}}{1 - 0,4^2}} = \frac{5}{3\sqrt{3}}$$

Værdierne af β kan fås af (3.43) og (3.44) ved henholdsvis at lade r gå mod $1/2_+$ og sætte $r = 4,5$. En partikel, der langsomt spiralerer ind mod det sorte hul p.g.a. energitab, f.eks. i form af gravitationsbølger, vil, når partiklen er langt fra det sorte hul, have $E = 1$. Derfor vil partiklen, når den når den sidste stabile cirkelbane, have afgivet energien hhv. $(1 - E_+)$ og $(1 - E_-)$, hvor E_+ og E_- er givet ved (3.45). Herefter vil partiklen hurtigt og uden nævneværdigt energitab falde mod begivenhedshorizonten – hvis den ikke er der i forvejen. Til omgivelserne er der derfor frigivet energien

$$(3.46) \quad \begin{aligned} 1 - E_+ &= 42,26\% \\ 1 - E_- &= 3,77\% \end{aligned}$$

af partiklens hvilemasseenergi mc^2 .

Energifrigørelsen er således væsentlig større, når partiklen spiralerer i hullets rotationsretning, end den var i Schwarzschild-metrikken (5,72%).

Numeriske løsninger

a) Sort hul uden elektrisk ladning

Som første sæt af numeriske løsninger til ligningerne (3.38) ser vi på fig.3.4 og fig.3.5 nedenfor en række fotonbaner, der nærmer sig et sort hul med elektrisk ladning $Q = 0$, og rotationsparameter $a = -\frac{1}{2}$. Under afsnittet om bevægelseskonstanter er omtalt en bevægelseskonstant, der også kan benyttes for partikler med lyshastigheden, nemlig J_z/E fra ligning (3.29.1).

Langt fra det sorte hul er

Langt fra sort hul ($r \rightarrow \infty$):

$$\lim(-g_{tt}) = 1, \quad \lim(g_{\varphi\varphi}) = 0$$

$$\lim\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = 0 \quad \lim\left(g_{\varphi\varphi} \frac{d\varphi}{dt}\right) = \lim\left(r^2 \frac{d\varphi}{dt}\right) = c_l b$$

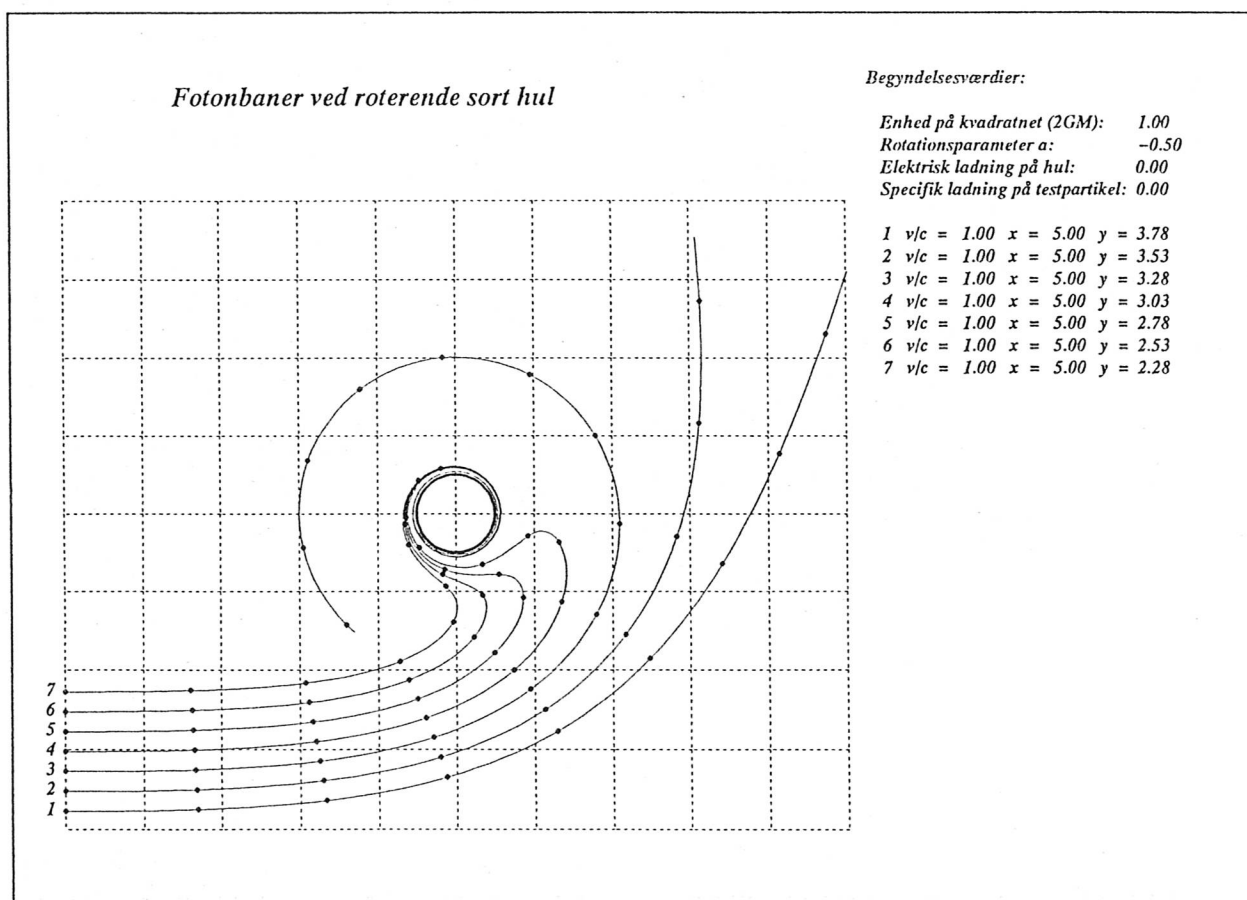


Fig.3.4

Figuren viser 7 fotonbaner med forskellige stødparametre. Grænsen mellem banerne, der blot afbøjes, og så de baner, der ender på det sorte huls horisont, er bane nr.3, der ender i en (ustabil) jævn cirkelbevægelse med $r = 2$. Stødparameteren for denne bane er $3,5 r_g$ – som det vises nedenfor. På figuren er $\Delta t = 2r_g/c$.

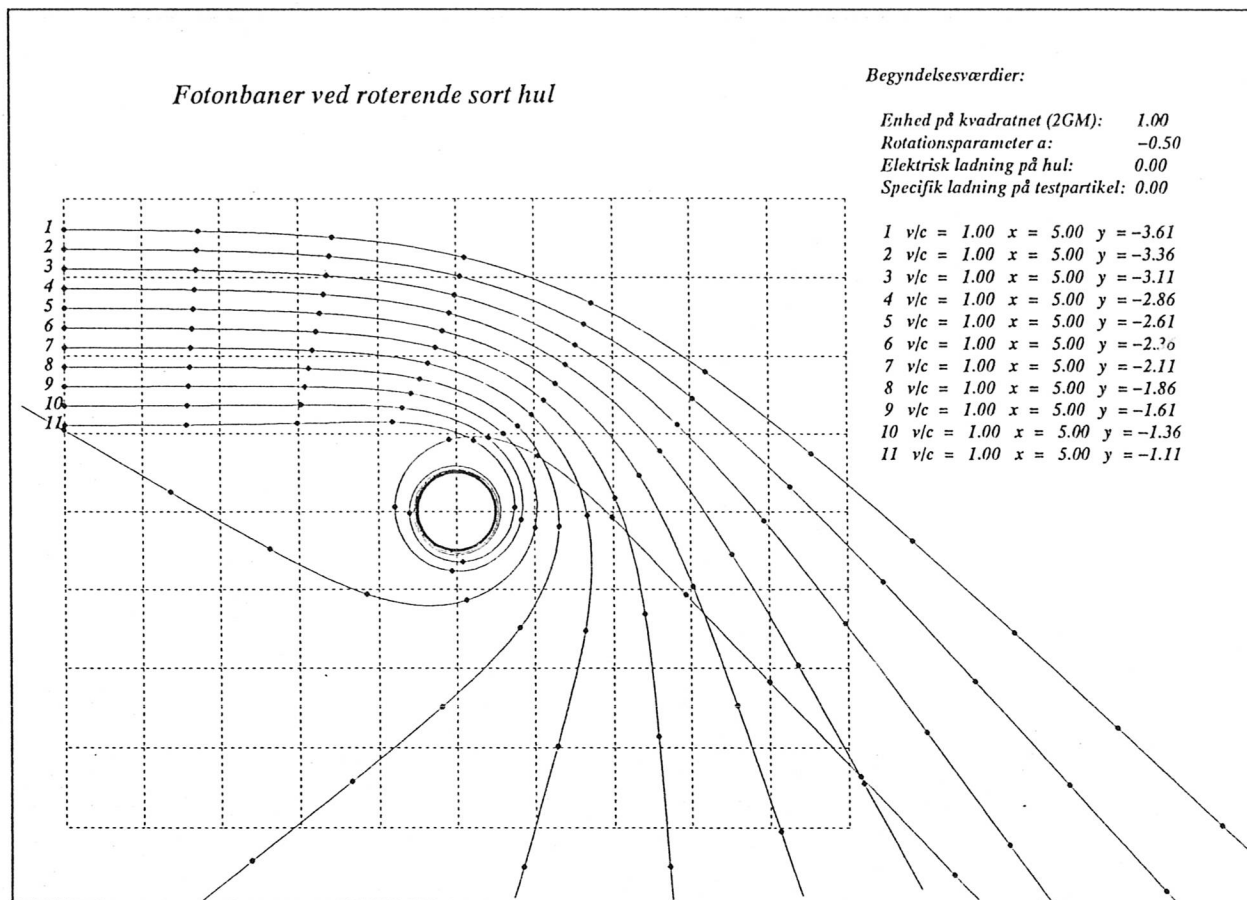


Fig.3.5

Denne figur viser 11 fotonbaner med hver sin stødparameter. Grænsebanen mellem de fotonerbaner, der ender i hullet, og dem, der blot afbøjes, er bane nr. 11, der ender i en jævn cirkelbevægelse på horisonten med $r = \frac{1}{2}$. Stødparameteren for denne bane er $1r_g$ – som det vises nedenfor. På figuren er $\Delta t = 2r_g/c$.

Begrundelsen for den sidste ligning er, at $r^2 d\varphi/dt$ er impulsmomentet (pr. masseenhed!) for fotonen langt fra det sorte hul, hvor tiden t for den fjerne iagttagere benyttes som parameter (altså ikke som i J_z , hvor parameteren er egentiden τ). Impulsmomentet (pr. masseenhed) kan uendelig langt fra det sorte hul skrives som hastighed (skomponent) gange stødparameter. Og da lysets fart c herude er 1, finder vi stødparameteren:

$$(3.47) \quad \text{Stødparameter:} \quad b = \frac{|J_z|}{E} = \frac{\left| g_{\varphi\varphi} \frac{d\varphi}{dt} + g_{t\varphi} \right|}{\left| -g_{tt} - g_{t\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \right|}$$

For at finde stødp-parametrene for de (grænse-)baner, der ender i en jævn cirkelbevægelse, benytter vi ligning (3.43) for vinkelhastigheden $\omega = d\phi/dt$ for jævn cirkelbevægelse og indsætter i ligning (3.47) for de to grænsebaner:

$$(3.48) \quad \text{For } r=2, a=1/2: \quad \omega_- = -\frac{2}{7}, \quad \text{hvoraf } b=3,5$$

For grænsebanen, der roterer med hullet, er vi nødt til at lave en grænseovergang $r \rightarrow 1/2_+$, idet både tæller og nævner i (3.47) går mod 0 (funktionsudtrykket for ω_+ fra (3.43) indsættes i stedet for ω):

$$(3.49) \quad \text{For } r \rightarrow 1/2_+, a=1/2: \quad b = \lim_{r \rightarrow 1/2_+} \left(\frac{J_z}{E} \right) = 1$$

Det roterende sorte hul er altså mere effektivt til at indfange fotoner, der bevæger sig mod hullets rotation end de, der bevæger sig med.

Det næste eksempel på en numerisk løsning er en polær bane, dvs. en bane, hvor begyndelseshastigheden er parallel med rotationsaksen for hullet. Se fig.3.6 og 3.7 nedenfor. De to figurer viser samme bane, blot i to forskellige projektioner.

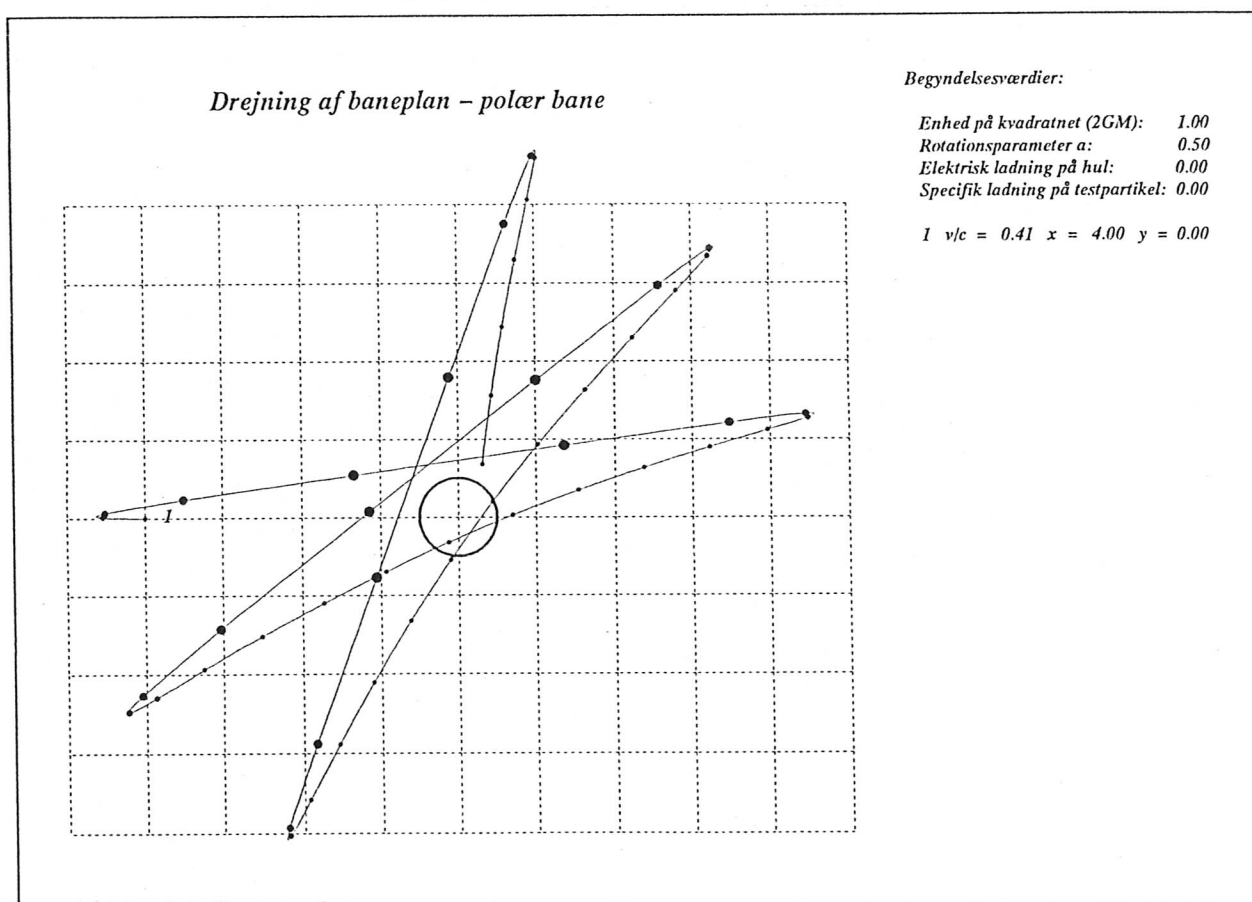


Fig.3.6

Figuren viser en polær bane – begyndende i punkt 1 i hullets ækvatorplan – set fra et punkt på rotationsaksen, som befinder sig højt over hullets "nordpol" (hullet roterer mod uret i denne projektion, idet $a = 1/2$). Hullets horisont i ækvatorplanen er vist med en cirkel.

Fig.3.6 viser banen fra et punkt "over" hullets ene pol, altså med et øjepunkt placeret langt ude på z-aksen (rotationsaksen). Derimod viser fig.3.37 den samme bane fra et punkt placeret tæt på ækvatorplanen (markeret med kvadratnet), og også tæt på partiklens begyndelsespunkt – mærket 1. Af fig.3.6 ses, at baneplanet roterer mod uret – ligesom hullet, idet $a = \frac{1}{2}$. Samme rotation af baneplan kan naturligvis også ses af fig.3.7. På denne figur er den del af banen, der ligger under ækvatorplanen, markeret med tætliggende punkter – modsætning til over denne plan, hvor banen er fuldt optrukket. Det skal bemærkes, at tidsmarkeringerne (altså de sorte punkter på banen) er større, jo tættere det pågældende punkt er på øjepunktet. Dette for at fremhæve den tredimensionale virkning i projektionen.

Denne rotation af baneplanet kan forklares ved tilstedeværelsen af Coriolis-kræfter i det anvendte referencesystem.

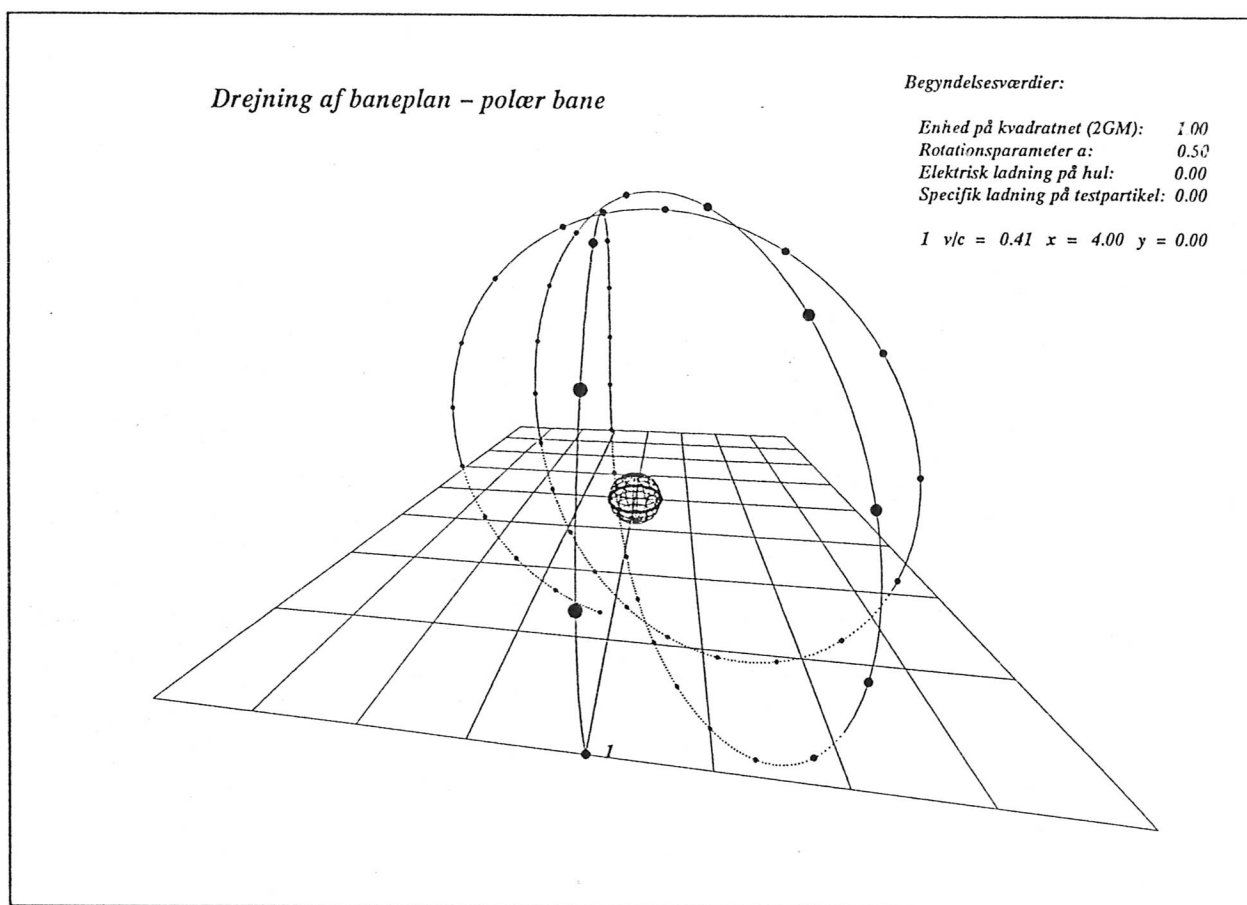


Fig.3.7

Denne figur viser samme bane som fig.3.6, blot i en anden projektion. Øjepunktet befinder sig lidt over ækvatorplanen, og tæt ved partiklens begyndelsespunkt markeret med et 1-tal. Hullets horisont er vist som en kugle.

Med passende begyndelsesbetingelser kan disse baner blive ganske komplicerede at se på. Men der er dog – med eller uden elektrisk ladning på det sorte hul – en simpel egenskab ved baneplanets hældning i forhold til rotationsaksen: den er konstant. Dette kræver lidt forklaring: ved baneplanets hældning i forhold til rotationsaksen forstås her værdien af θ i de punkter af banen, hvor $d\theta/dt = 0$, altså i de yderpunkterpunkter, hvor θ er størst eller mindst.

Påstanden kan vises på følgende måde: ifølge bevægelsesligningen (3.39c) er $\Theta = 0$ i et punkt, hvor $d\theta/dt = 0$. Af (3.40c) ses så, at

$$(3.50) \quad K_\theta = \cos^2 \theta \left[\alpha^2 (1 - E^2) + \frac{J_z^2}{\sin^2 \theta} \right] = (1 - \sin^2 \theta) \left[\alpha^2 (1 - E^2) + \frac{J_z^2}{\sin^2 \theta} \right]$$

Denne ligning gælder kun i de omtalte ekstremumpunkter for θ .

Da K_θ er en bevægelseskonstant ligesom a , E , J_z er det, ser vi af (3.50), at $\sin^2 \theta$ må have samme værdi i disse ekstremumpunkter. Kender vi f.eks. en minimumsværdi for θ , vil alle ekstremumsværdier være enten denne θ -værdi – eller maksimumsværdien $\pi - \theta$.

Det næste eksempel på en numerisk løsning vises på fig.3.8 nedenfor. Begyndelsespunktet mærket 1 ligger uden for ækvatorplanen, og begyndelsesfarten $\beta = 0.08$ er tilstrækkelig lille til, at partiklen indfanges af hullet.

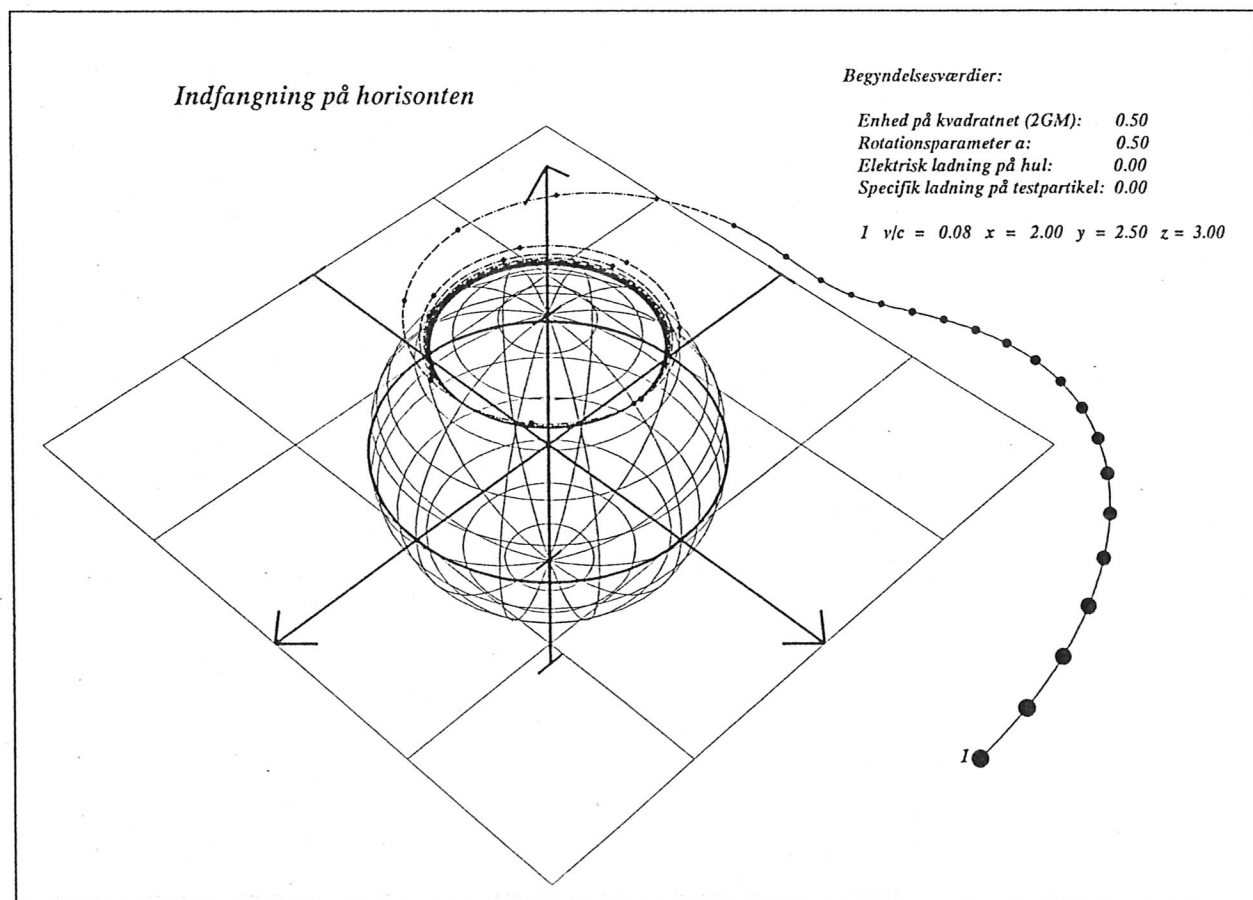


Fig.3.8

Figuren viser, hvordan en partikel indfanges på horisonten af et roterende, sort hul. Jo tættere på horisonten, partiklen kommer, desto mere tvinges den til at følge hullets rotation. Set fra en fjern iagttagere vil partiklen til evig tid være tvunget til at følge hullets rotation – uden at den nogensinde når horisonten.

Som figuren viser, fanges partiklen på horisonten og bliver der til evig tid (tidsparameter $t!$). Partiklen roterer sammen med hullet med vinkelhastigheden ω_{hor} givet ved (3.12). I dette tilfælde fanges partiklen på en θ – værdi, der ikke er 0. Denne værdi af θ er bestemt af begyndelsesbetingelserne. Det skal til figuren bemærkes, at partiklen vil passere begivenhedshorisonten til en endelig *egentid!*

Selvom den fjerne iagttager aldrig vil se denne passage, og selvom den fjerne iagttager ser partiklen tilbagelægge uendelig mange omgange på begivenhedshorisonten – vil partiklen alligevel på en endelig egentid kunne overkomme disse uendeligheder : partklens fart nærmer sig lysets, når den nærmer sig horisonten, derfor forkortes egentiden i stigende grad i forhold til tiden t , og ligeledes forkortes i stigende grad den afstand, som partiklen – set fra den fjerne iagttager – skal tilbagelægge!

b) Sort hul med elektrisk ladning

På den næste figur (fig.3.9) er det sorte hul tildelt en positiv elektrisk ladning $Q = 0.5$, hullet roterer ikke, dvs. $a = 0$. Testpartiklen har den specifikke ladning $q/m = 10$.

Hvis vi som eksempel ser på et sort hul med en masse på en solmasse, er som tidligere nævnt $r_g = 3\text{km}$. Den elektriske ladning $Q = 0.5$ kan så omregnes til SI-enheder på følgende måde (se indledning til kapitel 3):

$$\text{SI-enheder: } Q = \frac{1}{2} \frac{c^2}{\sqrt{2Gk_c}} r_g = \frac{1}{2} \cdot 8,22 \cdot 10^{16} \text{ C/m} \cdot 3000\text{m} = 1,23 \cdot 10^{20} \text{ C}$$

Ligeledes kan den specifikke ladning $q = 10$ omregnes til SI-enheder:

$$\text{SI-enheder: } \frac{q}{m} = 10 \frac{\frac{c^2}{\sqrt{2Gk_c}} r_g}{M_{sol}} = 10 \frac{2,46 \cdot 10^{20} \text{ C}}{2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}} = 1,23 \cdot 10^{-9} \text{ C/kg}$$

Den størrelse, der er af betydning for den elektromagnetiske vekselvirkning, er naturligvis produktet q/mQ .

Det fremgår af figuren, at den elektriske frastødning helt dominerer billedet. Der er simpelthen tale om spredning på et Coulomb-potential. Dette er næppe overraskende. Sætter vi derimod farten op, bliver situationen en anden, som det ses på fig. 3.10 nedenfor. De elektriske ladninger er uforandrede i forhold til fig.3.9.

Som det ses på denne figur, er den elektriske frastødning ikke længere dominerende. Kun for partikler, der kommer meget tæt på horisonten, er frastødningen dominerende. På lidt større afstand af hullet kan tyngdekraften på partiklerne hamle op med den elektriske frastødning. Årsagen til denne måske lidt overraskende ændring i forhold til fig.3.9 er, at partklens energi og derved masse forøges ved stigende fart, og derved vil tyngdekraften på partiklen øges – medens den elektriske frastødning ikke øges nævneværdigt ved fartforøgelsen fra 90% af lyshastigheden til 99% af lyshastigheden. Denne effekt kan ses i bevægelsesligningerne (3.38), idet det elektromagnetiske vekselvirkningsled er ganget med faktoren $d\tau/dt$, og denne størrelse formindskes ved stigende fart.

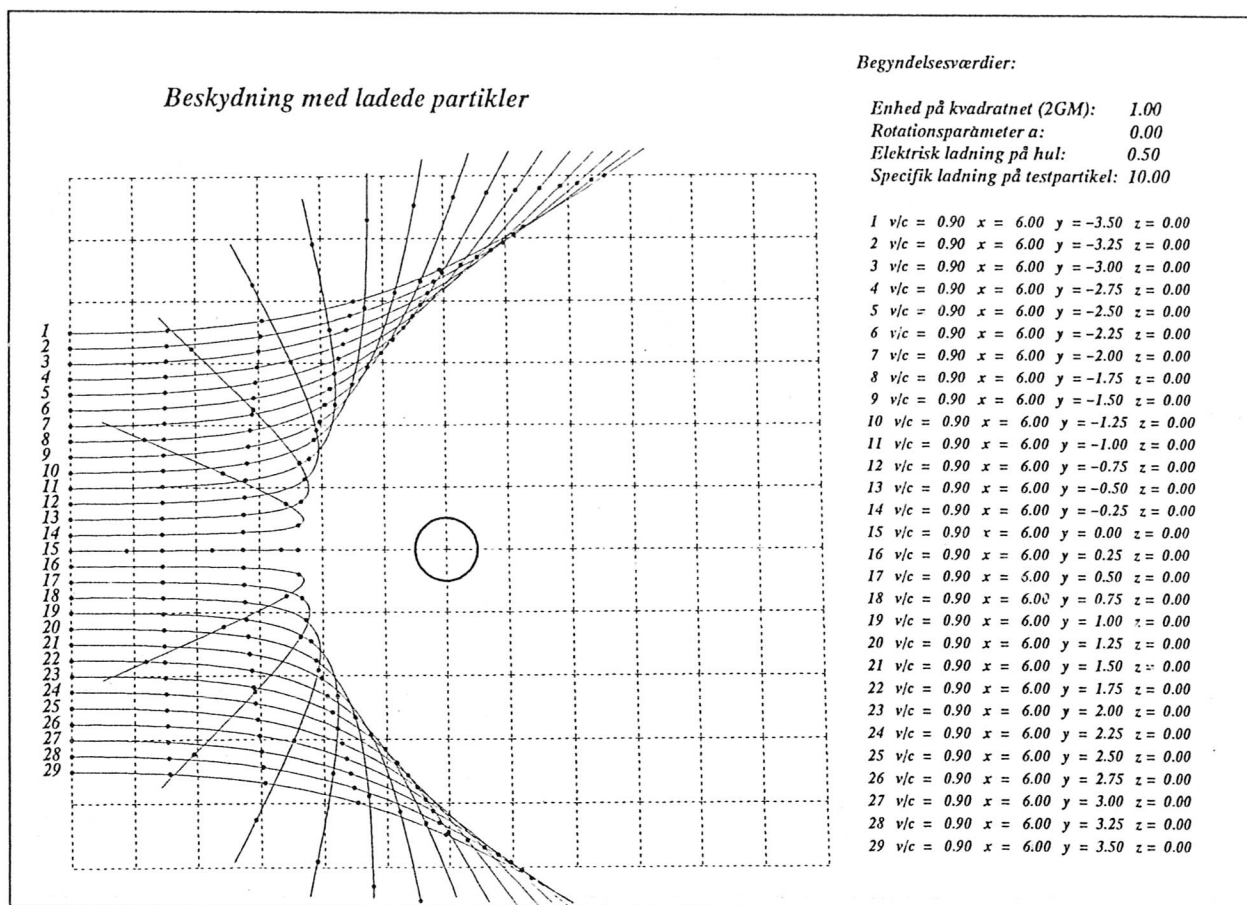


Fig.3.9

Figuren viser vekselvirkningen mellem et positivt elektrisk ladet sort hul og 29 positivt ladede testpartikler, der skydes mod hullet med 90% af lysets fart. På figuren er $\Delta t = 2r_g$

For (tilstrækkeligt!) ekstremt relativistiske partikler spiller de elektromagnetiske kræfter derfor ikke en nævneværdig rolle.

Denne pointe understreges ligeledes af de to sidste figurer 3.11 og 3.12, hvor den elektriske ladning på hullet er sat lidt ned, $Q = 0,4$ til gengæld for, at hullet roterer, $a = -0,3$. Partiklernes fart er her sat op til 99,9% af lyshastigheden. Det ses af begge figurer, at testpartiklerne nu på trods af den elektriske frastødning godt kan indfanges af det sorte hul, og de vil derved forøge hullets elektriske ladning. Tilsvarende kan hullet naturligvis indfange partikler med negativ elektrisk ladning – herunder også partikler, der er urelativistiske.

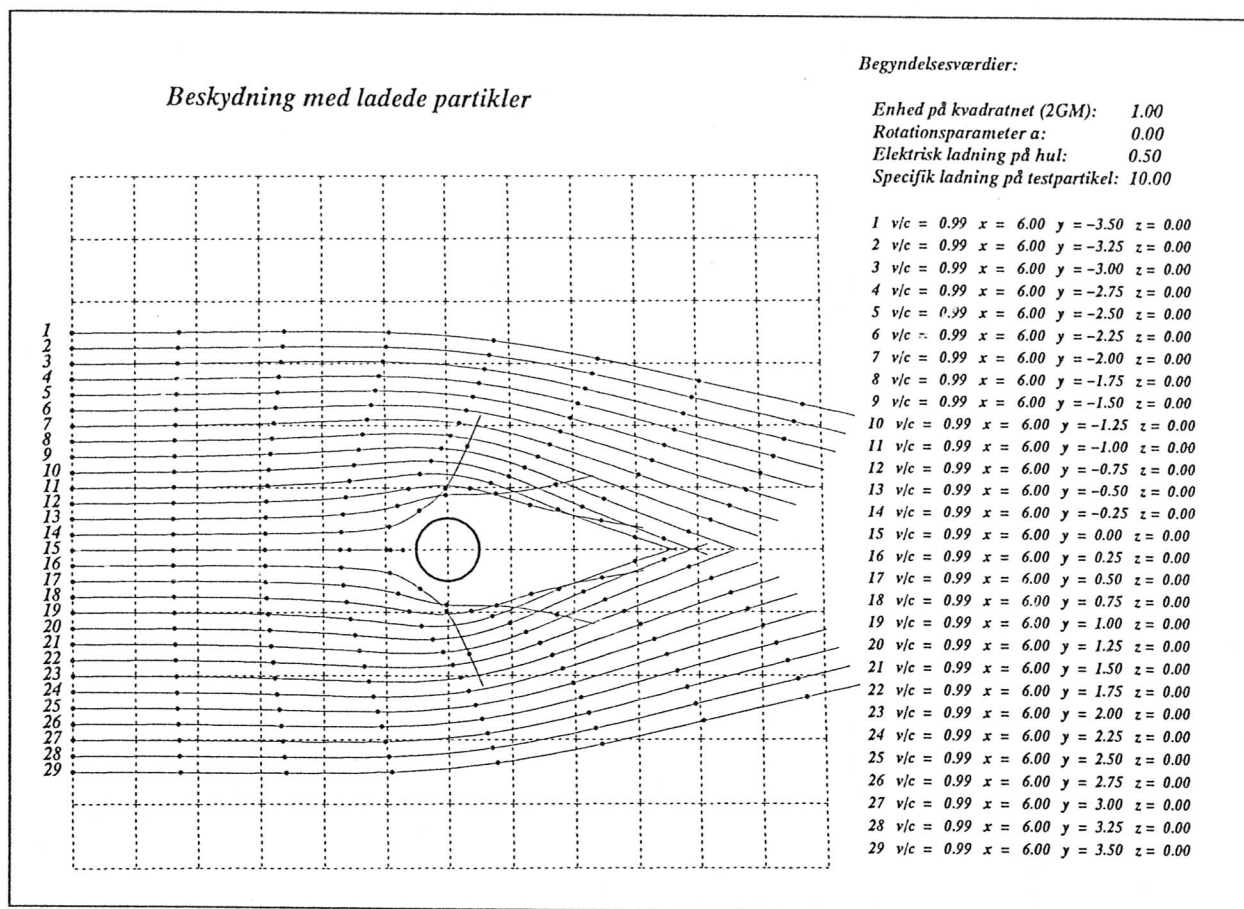


Fig.3.10

Denne figur svarer til fig.3.9, blot er partiklernes fart øget fra 90% af lyshastigheden til 99% af lyshastigheden. Det fremgår, at den elektriske frastødning ikke længere er så dominerende i forhold til tyngdekræfterne.

Hermed er denne fortælling foreløbig slut!

ref.1: Sorte huller, af I.D. Novikov, fysik-tidsskriftet Kvant, nr 2, nov. 1992

ref.2: Herbert Goldstein: Classical Mechanics, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1969

ref.3: Differential Equations, McGrawHill

ref.4: Steven Weinberg: Gravitation and Cosmology, John Wiley & Sons, Inc. New York London Sydney Toronto.

ref.5: Misner, Thorne, Wheeler: Gravitation, 1973. Freeman, San Francisco

ref.6: C. Møller: The Teori of Relativity, 2.edition, 1972. Clarendon Press, Oxford

ref.7: I. D. Novikov, V. P. Frolov: Physics of Black Holes, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London.

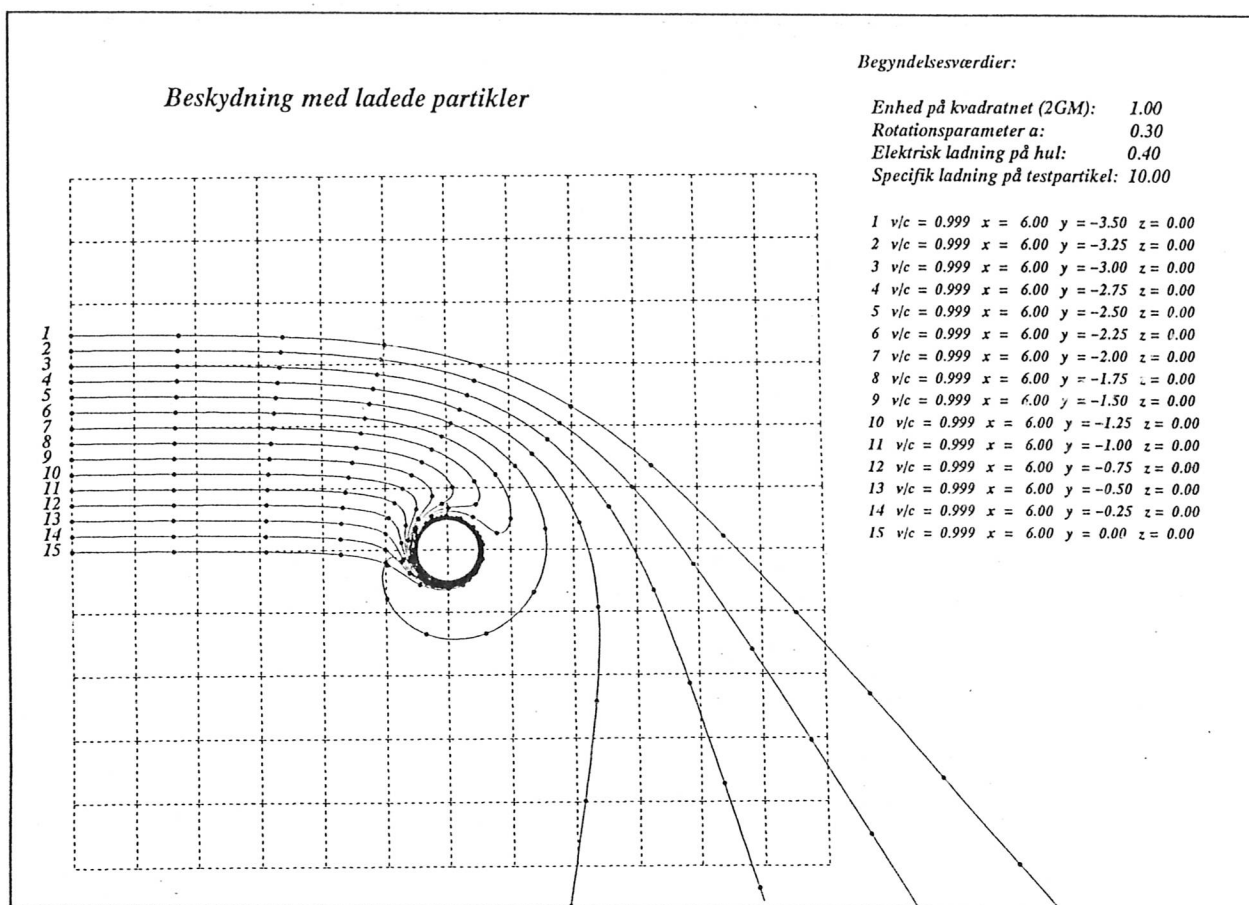


fig.3.11

Figuren viser, at indfangning af ladede relativistiske partikler med samme ladningsfortegn som det sorte hul kan finde sted. Det sorte huls ladning bliver herved forøget. Med de på figuren opgivne elektriske ladninger spiller den elektromagnetiske vekselvirkning ikke nogen stor rolle, når farten på partiklerne er 99,9% af lyshastigheden

Og endelig figur 3.12:

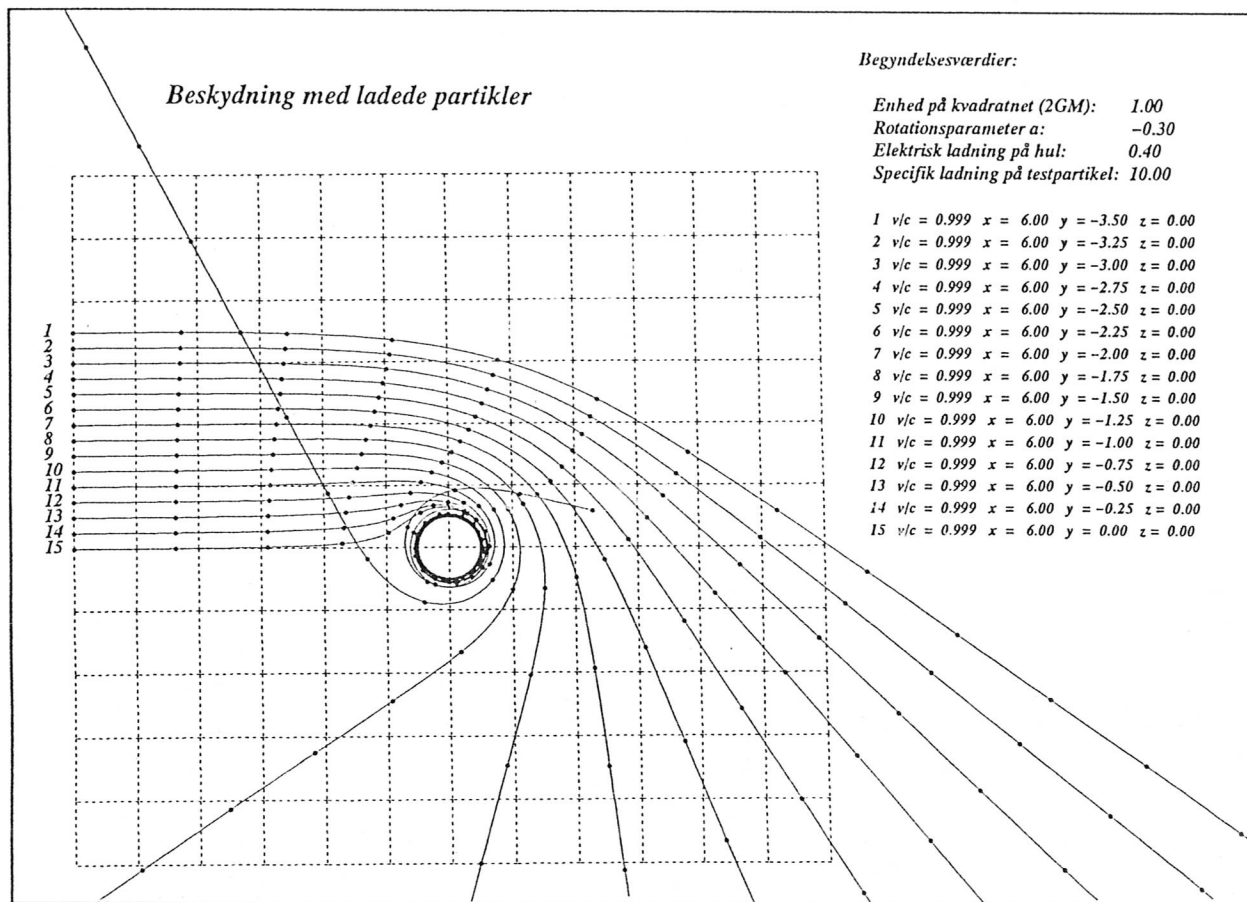


Fig. 3.12

Figuren svarer til fig. 3.11 – her roterer hullet blot "med" partiklerne