Bevis for løsningsformlen til vækstligning for logistisk vækst

- Fra www.borgeleo.dk

Differentialligningen for logistisk vækst er:

(1) $$\frac{dy}{dx} = a \cdot y \cdot (M - y)$$

hvor *y* er populationens størrelse på tidspunktet *x*.

Vi separerer først de variable:

$\frac{1}{y \cdot (M-y)} dy = a \cdot dx$ og ganger med *M* på begge sider: (2) $\frac{M}{y \cdot (M-y)} dy = M \cdot a \cdot dx$

Opgave 0: hvilke værdier af y udelukker vi ved den første omformning?

Inden vi kan integrere, må vi omforme venstresiden:

(3) $\frac{M}{y \cdot (M-y)} = \frac{1}{M-y} + \frac{1}{y}$ - det kaldes *partial-brøk-opløsning*

Opgave 1: vis at det er rigtigt – uanset y-værdi!

Vi indsætter opløsningen (3) i (2):

(4) $$\left(\frac{1}{M-y} + \frac{1}{y}\right) dy = M \cdot a \cdot dx$$

Denne ligning integreres så på begge sider. Resultatet er:

(5) $$-ln|M - y| + ln|y| = M \cdot a \cdot x + c$$

Opgave (2): vis det!

Vi ganger (5) igennem med -1 på begge sider:

(6) $$ln|M - y| - ln|y| = -M \cdot a \cdot x - c$$

hvoraf følger:

(7) $ln\left|\frac{M-y}{y}\right| = -M \cdot a \cdot x - c$ og heraf igen: $\left|\frac{M-y}{y}\right| = e^{-M \cdot a \cdot x - c} = e^{-M \cdot a \cdot x} \cdot e^{-c}$

Opgave (3): begrund disse omformninger!

Ved at 'ophæve' numerisk-tegnet, fås:

$\frac{M-y}{y} = \pm e^{-c} \cdot e^{-M \cdot a \cdot x} = C \cdot e^{-M \cdot a \cdot x}$ hvor vi har sat $\pm e^{-c} = C$ (*C* kan ikke blive 0 her)

Vi ganger så ligningen med *y* på begge sider:

$$M - y = y \cdot C \cdot e^{-M \cdot a \cdot x}$$

Og omformer så igen

$$M - y = y \cdot C \cdot e^{-M \cdot a \cdot x} \qquad \Leftrightarrow \qquad M = y + y \cdot C \cdot e^{-M \cdot a \cdot x} = y \cdot (1 + C \cdot e^{-M \cdot a \cdot x})$$

Endelig isoleres *y*:

(8) $\quad y = \frac{M}{1 + C \cdot e^{-M \cdot a \cdot x}}$ - hermed er løsningsformlen vist

Og dog: havde vi ikke ved den første omformning af (1) udelukket visse værdier af *y*?

Opgave 4: vis, at de to udelukkede værdier faktisk er løsninger til (1)! Kan disse værdier af y opnås af løsningsformlen (8) ved en passende værdi af konstanten C ?