Bevis for løsningsformlen for logistisk vækst-ligning

- *fra www.borgeleo.dk*

Den vækst-ligning, der gælder for logistisk vækst, er

(1) $\frac{dy}{dx} = a \cdot y \cdot (M - y)$

Vi indfører den nye variable *u* på denne måde:

(2) $y = \frac{M}{1+u}$ - fordi løsningsformlen *påstås* at være: $y = \frac{M}{1+C \cdot e^{-aMx}}$

Den variable *u* skal derfor vises at være en eksponentiel funktion: $u = C \cdot e^{-aMx}$

Og det er den, hvis den opfylder vækstligningen

(3) $\frac{du}{dx} = -aM \cdot u$ den har netop *u*-løsningen ovenfor – *som vi tidligere har vist*

Så hvis vi kan omskrive (1) til (3), har vi bevist det ønskede!

Beviset:

Venstresiden (v.s.) af (1) skal udtrykkes ved *u*, og derfor differentierer vi (2) mht. *x*.

Men først omskriver vi udtrykket for y på følgende måde: $y = \frac{M}{1+u} = M \cdot \frac{1}{1+u} = M \cdot (1+u)^{-1}$. Altså en potensfunktion af 1+u. Vi differentierer herefter den sammensatte funktion $M \cdot (1+u)^{-1}$:

$$v.s. = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(M \cdot (1+u)^{-1}\right) = M \cdot (-1) \cdot (1+u)^{-2} \cdot \frac{d(1+u)}{dx} = -\frac{M}{(1+u)^2} \cdot \frac{du}{dx}$$

hvor vi har benyttet en regel om at differentiere potenser – og en regel om at differentiere sammensatte funktioner. Samt omskrivningen $(1+u)^{-2} = \frac{1}{(1+u)^2}$.

Højresiden (h.s.) af (1) skal også udtrykkes ved den variable *u*:

$$h.s. = a \cdot y \cdot (M - y) = a\frac{M}{1+u} \cdot \left(M - \frac{M}{1+u}\right) = a\frac{M}{1+u} \cdot \left(\frac{M \cdot (1+u)}{1+u} - \frac{M}{1+u}\right)$$

$$= a\frac{M}{1+u} \cdot \left(\frac{M \cdot (1+u) - M}{1+u}\right) = a\frac{M}{1+u} \cdot \left(\frac{M + Mu - M}{1+u}\right) = a\frac{M}{1+u} \cdot \frac{Mu}{1+u} = a\frac{M^2}{(1+u)^2}u$$

Men nu skal venstresiden og højresiden af ligning (1) være ens:

$$v.s. = h.s. \Leftrightarrow -\frac{M}{(1+u)^2} \cdot \frac{du}{dx} = a\frac{M^2}{(1+u)^2}u$$

I denne ligning kan vi dele med *M* på og desuden gange med $(1+u)^2$ på begge sider. Resultatet er:

$-\frac{du}{dx} = aM \cdot u$ eller $\frac{du}{dx} = -aM \cdot u$

Men det er jo netop vækstligningen (3), så derfor er $u = C \cdot e^{-aMx}$. Sat ind i formel (2) har vi bevist løsningsformlen til (1):

(4) $y = \frac{M}{1+C \cdot e^{-aMx}}$ QED.