Differentiation af et produkt af to funktioner – bevis for regneregel

- fra borgeleo.dk

Vi ser på produktet af to funktioner f og g, som vi antager begge er differentiable i x_0. Det kan formuleres på denne måde:

(1) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to f'(x_0) \;\; når \;\; x \to x_0$ og

(2) $\frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \to g'(x_0) \;\; når \;\; x \to x_0$

Tilvæksten i f og g, der svarer til x-tilvæksten $x - x_0$, er altså defineret ved

(3) $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ og $\Delta g = g(x) - g(x_0)$

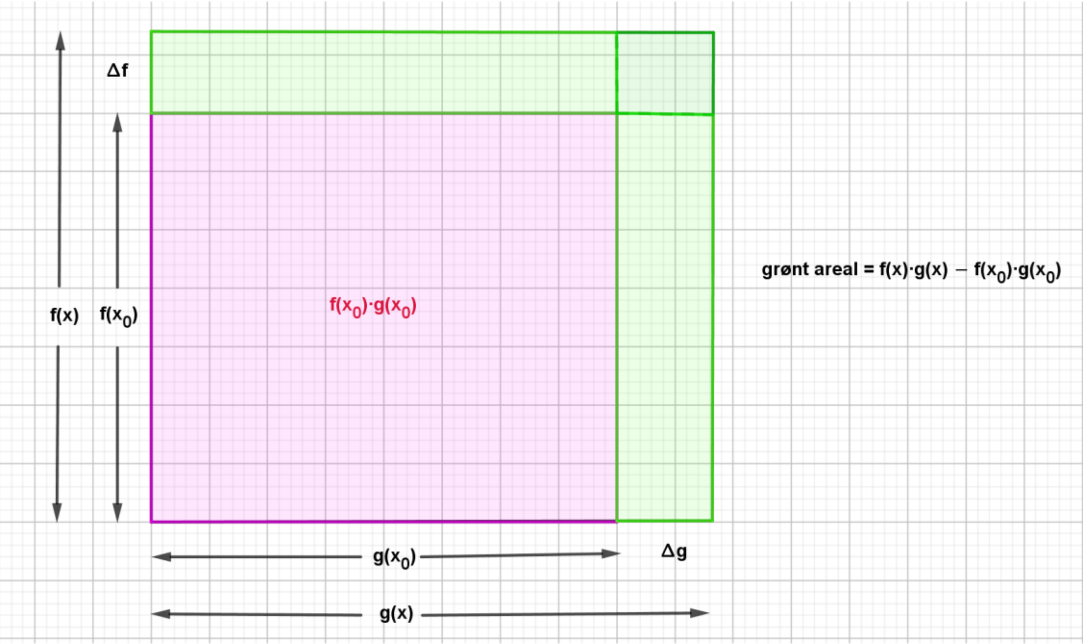
Dernæst ser vi på *produktfunktionen*

$$p(x) = f(x) \cdot g(x)$$

som vi fortolker som et areal (højde gange bredde), se figuren nedenfor.

Tilvæksten i produktfunktionen bliver (overvej lige det!!)

(4) $\Delta p = p(x) - p(x_0) = f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)$



Tilvæksten i arealet (produktfunktionen) Δp er de tre grønne arealer på figuren.

Øvelse 1:
Begrund, at

(5) $\Delta p = \Delta f \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot \Delta g + \Delta f \cdot \Delta g$ (de tre grønne arealer)

Herefter deler vi tilvæksten i p-funktionen med Δx, og splitter brøken op i 3 led:

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{\Delta f \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot \Delta g + \Delta f \cdot \Delta g}{\Delta x}$$ differenskvotient for produktfunktion

Vi deler denne brøk op i tre:

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{\Delta f \cdot g(x_0)}{\Delta x} + \frac{f(x_0) \cdot \Delta g}{\Delta x} + \frac{\Delta f \cdot \Delta g}{\Delta x}$$

Vi bruger så en brøkregel for at få differenskvotienterne (1) og (2) i spil:

(6) $$\frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} + \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \Delta g$$

Endelig ser vi på grænseværdien af alle disse størrelser når $\Delta x \to 0$ (eller $x \to x_0$)

Når vi ser på forudsætningerne (1) og (2), ser vi, at

(7) $$\frac{\Delta p}{\Delta x} \to f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 \quad \text{når} \quad \Delta x \to 0$$

Altså har vi vist, at

(8) $$p'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

produktreglen for differentiation

At $\Delta g \to 0$ i sidste led i (6), kan man begrunde ved omskrivningen $\Delta g = \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot \Delta x$. Her gælder, at $\frac{\Delta g}{\Delta x} \to g'(x_0)\ \ når\ \ \Delta x \to 0$ ifølge (2). Derfor vil $\Delta g = \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot \Delta x$ nærme sig $g'(x_0) \cdot 0$. Altså spiller det sidste led i (6) ingen rolle i den endelige formel (8).
Den sidste beregning viser, at funktionen g er kontinuert i x_0 - ligesom f er det.

Voila.