Differentiation af produkt af to funktioner – bevis for regneregel

Vi ser på produktet af to funktioner *f* og *g*, som vi antager begge er differentiable i x_0 . Det kan formuleres på denne måde:

(1) $$\frac{\Delta f}{h} \to f'(x_0) \quad når \quad h \to 0,$$ og

(2) $$\frac{\Delta g}{h} \to g'(x_0) \quad når \quad h \to 0$$

Tilvæksten i *f* og *g*, der svarer til x-tilvæksten h, er defineret ved

(3) $\Delta f = f(x_0+h) - f(x_0)$ hvilket giver: $f(x_0+h) = f(x_0) + \Delta f$

$\Delta g = g(x_0+h) - g(x_0)$ der giver: $g(x_0+h) = g(x_0) + \Delta g$.

Dernæst ser vi på *produktfunktionen* $p(x) = f(x)\cdot g(x)$.
Vi ser på tilvæksten i produktfunktionen, der svarer til tilvæksten *h*, og benytter så (3):

(4) $$\begin{aligned}\Delta p &= p(x_0+h) - p(x_0) = f(x_0+h)\cdot g(x_0+h) - f(x_0)\cdot g(x_0)\\ &= (f(x_0)+\Delta f)\cdot(g(x_0)+\Delta g) - f(x_0)\cdot g(x_0)\end{aligned}$$

Vi ganger de to parenteser i sidste linje ud (tjek lige udregningen!) og reducerer:

(5) $$\begin{aligned}\Delta p &= f(x_0)\cdot g(x_0) + \Delta f\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot\Delta g + \Delta f\cdot\Delta g - f(x_0)\cdot g(x_0)\\ &= \Delta f\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot\Delta g + \Delta f\cdot\Delta g\end{aligned}$$

Herefter deler vi tilvæksten i *p*-funktionen med tilvæksten i *x*, og splitter brøken op i 3 led:

(6) $$\frac{\Delta p}{h} = \frac{\Delta f\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot\Delta g + \Delta f\cdot\Delta g}{h} = \frac{\Delta f}{h}\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot\frac{\Delta g}{h} + \frac{\Delta f}{h}\cdot\Delta g$$

Endelig ser vi på grænseværdien af alle disse størrelser når $h \to 0$:

Når vi ser på forudsætningerne (1) og (2), ser vi, at

(7) $$\frac{\Delta p}{h} \to f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0) + f'(x_0)\cdot 0$$

Altså har vi vist, at

(8) $p'(x_0) = f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)$ - *produktreglen for differentiation*

At $\Delta g \to 0$ i sidste led i (6), kan man begrunde ved omskrivningen $\Delta g = \frac{\Delta g}{h}\cdot h$. Her gælder, at $\frac{\Delta g}{h} \to g'(x_0)$ *når* $h \to 0$. Herved vil $\Delta g = \frac{\Delta g}{h}\cdot h$ nærme sig $g'(x_0)\cdot 0 = 0$. Voila.