Differentiation af sammensatte funktioner

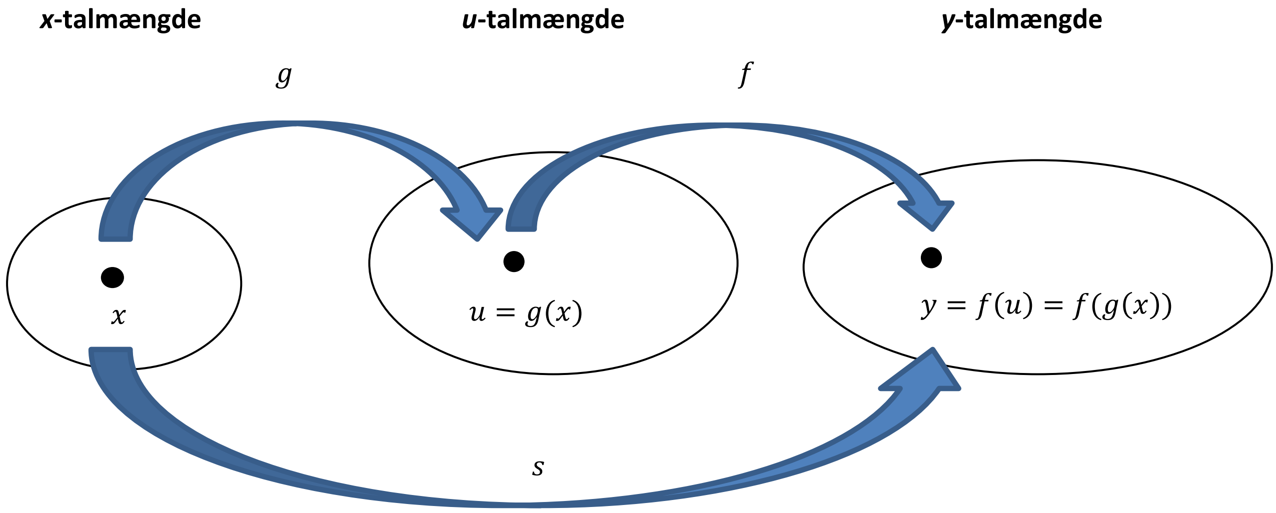
- Fra www.borgeleo.dk

En sammensat funktion af den variable x er en funktion, hvor x først indsættes i den såkaldte *indre* funktion. Resultatet fra den indre funktion indsættes så i den såkaldte *ydre* funktion. Herved fås resultatet: den sammensatte funktions værdi i x.

Hvis vi indfører navne på funktionerne, kan vi udtrykke det på følgende måde:

(1) Indre funktion: $u = g(x)$
(2) Ydre funktion: $y = f(u)$

Den sammensatte funktion $s(x)$ er så defineret sådan: $s(x) = f(g(x))$ - se figuren nedenfor.



Sammensat funktion $s(x) = f(g(x))$

Opgave 1

Vi ønsker at danne den sammensatte funktion $s(x) = f(g(x))$, hvor

$$g(x) = 2x - 1 \qquad \text{og} \qquad f(u) = \sqrt{u}$$

a) Udregn $s(1)$, $s(5)$ og $s(13)$ ved at begynde med at udregne $g(1)$, $g(5)$ og $g(13)$ og så indsætte disse tal i funktionen $f(u)$ i stedet for u.
b) Opstil et udtryk for $s(x)$

c) Opskriv definitionsmængden for $s(x)$

Opgave 2

Vi ser på den sammensatte funktion

$$s(x) = (3x+1)^2$$

a) Opskriv en forskrift for den indre funktion $g(x)$
b) Opskriv en forskrift for den ydre funktion $f(u)$
c) Udregn parentesen i anden i den sammensatte funktion ovenfor, og bestem herefter den afledede funktion $s'(x)$
d) Beregn så $s'(0)$, $s'(1)$ og $s'(5)$

Vi vil herefter se på, hvordan vi generelt beregner den aflede funktion af en sammensat funktion. Vi benytter de samme betegnelser som ovenfor, se (1) og (2).

Med disse betegnelser kan den aflede funktion differentieres på følgende måde:

(3)	$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$	kædereglen

Eller med andre betegnelser:

(3a)	$s'(x) = f'(u) \cdot g'(x)$,	hvor *u* skal udskiftes med $g(x)$

hvor den sammensatte funktion *s* er givet ved $s(x) = f(g(x))$

Eksempel

Vi ser på funktionen $s(x) = (2x+1)^3$

Vi opfatter funktionen som sammensat af den ydre funktion

$f(u) = u^3$ med den afledede funktion $f'(u) = 3 \cdot u^2$

og den indre funktion

$g(x) = 2x + 1$ med den afledede funktion $g'(x) = 2$

Vi kan nu beregne differentialkvotienten af den sammensatte funktion ved hjælp af (3a):

$$s'(x) = f'(u) \cdot g'(x) = 3 \cdot u^2 \cdot 2 = 3 \cdot (2x+1)^2 \cdot 2 = 6 \cdot (2x+1)^2$$

F.eks. er $s'(1) = 6 \cdot (2 \cdot 1 + 1)^2 = 6 \cdot 3^2 = 54$

Læg mærke til, at den variable *u* udskiftes med 2*x*+1 i overensstemmelse med reglen (3a)

Opgave 3

a) Beregn den afledede funktion $s'(x)$ for den funktion, der optræder i opgave 1.
b) Udregn $s'(1)$, $s'(5)$ og s $'(13)$

Opgave 4

a) Beregn den afledede funktion $s'(x)$ for den funktion, der optræder i opgave 2.
b) Udregn $s'(0)$, $s'(1)$ og $s'(5)$
c) Sammenlign disse resultater med opgave 2

Opgave 5

a) Beregn den afledede funktion af $s(x) = (10x - 3)^7$
b) Beregn den afledede funktion af $s(x) = \frac{1}{3x-2}$ og herefter $s'(1)$

Bevis for reglen for differentiation af sammensatte funktioner

Vi benytter de samme betegnelser, som blev indført på side 1 af dette dokument:

Indre funktion: *u* = *g*(*x*)

Ydre funktion: *y* = *f*(*u*)

Den sammensatte funktion *s* kan også skrives som $s(x) = f(g(x))$.

Vi danner tilvæksten i funktionen $g(x)$:

(4) $\Delta u = \Delta g = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)$ hvor Δx er tilvæksten i *x*

Og danner også tilvæksten i funktionen $f(u)$:

(5) $\Delta y = \Delta f = f(u_0 + \Delta u) - f(u_0)$ hvor Δu er givet ved (4)

Det forudsættes, at funktionen *g* er differentiabel i tallet x_0, således at

(6) $\frac{\Delta g}{\Delta x} \rightarrow g'(x_0)$ når $\Delta x \rightarrow 0$

Og at funktionen *f* er differentiabel i $u_0 = g(x_0)$, sådan at

(7) $\frac{\Delta f}{\Delta u} \rightarrow f'(u_0)$ når $\Delta u \rightarrow 0$ (som Δu gør, når $\Delta x \rightarrow 0$, fordi *g* er kontinuert i x_0)

Vi udregner så differens-kvotienten for den sammensatte funktion:

(8) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x}$

Her er $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ differenskvotienten for den sammensatte funktion $s(x)$ (der begynder i *x* og ender i *y*), og vi kan derfor betegne denne med $\frac{\Delta s}{\Delta x}$. Altså omformes (8) til

(8a) $\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x}$

I (8) har vi først brugt en regneregel for brøker og også udnyttet (4) og (5).

Endelig ser vi på, hvad der sker med (8) når $\Delta x \rightarrow 0$ (og dermed $\Delta u \rightarrow 0$):

(9) $\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} \rightarrow f'(u_0) \cdot g'(x_0)$ når $\Delta x \rightarrow 0$

Hermed har vi vist, at den sammensatte funktion $s(x) = f(g(x))$ er differentiabel i x_0, og

(10)	$s'(x_0) = f'(u_0) \cdot g'(x_0)$,	hvor	$u_0 = g(x_0)$

Betydningen af denne sætning er det samme som betydningen af kædereglen (3).

Differentiation af den naturlige eksponentialfunktion e^x

Vi definerer funktionen *f*(x) på følgende måde:

(11) $f(x) = e^x$

Vi skal altså forsøge at finde $f'(x_0)$.

Vi begynder med at bestemme $f'(0)$.

1) $\Delta f = f(h) - f(0) = e^h - e^0 = e^h - 1$
2) $\frac{\Delta f}{h} = \frac{e^h - 1}{h}$
3) $\frac{\Delta f}{h} = \frac{e^h - 1}{h} \to ?$ når $h \to 0$

Opgave 6

a) For at finde ud af, hvilket tal, differenskoefficienten nærmer sig, når *h* nærmer sig 0, skal du udfylde tabellen nedenfor.

h	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001
$\frac{e^h - 1}{h}$					

b) Hvad konkluderer du mht. punkt 3) ovenfor? Og hvad bliver værdien af $f'(0)$?

Vi vil nu bestemme $f'(x_0)$.

Vi går frem som ovenfor:

1) $\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0) = e^{x_0 + h} - e^{x_0} = e^{x_0} \cdot e^h - e^{x_0} = e^{x_0}(e^h - 1)$
2) $\frac{\Delta f}{h} = \frac{e^{x_0}(e^h - 1)}{h} = e^{x_0} \cdot \frac{e^h - 1}{h}$
3) $\frac{\Delta f}{h} = e^{x_0} \cdot \frac{e^h - 1}{h} \to e^{x_0} \cdot ?$ når $h \to 0$

Skriv ind, hvad der skal stå på spørgsmålets plads - se øvelse 6.

Altså har vi argumenteret for, at

(12) $f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = e^{x_0}$

den afledede af den naturlige eksponentialfunktion

Den afledede funktion af den naturlige eksponentialfunktion er altså funktionen selv!

Opgave 7

Bestem den afledede funktion, når

1) $s(x) = e^{-0,01x}$
2) $s(x) = e^{3x}$
3) $s(x) = e^{x^2-4x+1}$
4) $s(x) = e^{\sqrt{x}}$
5) $s(x) = \sqrt{e^x}$

Differentiation af den naturlige logaritmefunktion $\ln(x)$

For at finde den afledede funktion af den naturlige eksponentialfunktion, udnytter vi, at den naturlige eksponentialfunktion og den naturlige eksponentialfunktion er hinandens omvendte funktioner. Derfor er

(13) $\qquad e^{\ln(x)} = x$

Vi differentierer nu denne ligning på begge sider efter reglen om sammensatte funktioner og får

(14) $\qquad e^{\ln(x)} \cdot ln'(x) = 1$

Heraf får vi - idet vi udnytter (13):

(15) $\qquad x \cdot ln'(x) = 1,$ $\qquad$ altså

(16) $\qquad ln'(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad$ den afledede af den naturlige logaritmefunktion

Opgave 8

Som vi tidligere har vist, er der følgende sammenhæng mellem funktionerne $\ln(x)$ og $\log(x)$:

$$\ln(x) = \ln(10) \cdot \log(x)$$

Brug denne sammenhæng til at bestemme den aflede funktion $\log'(x)$.

Opgave 9 - differentiation af a^x

1) Begrund sammenhængen $a^x = e^{x\cdot\ln(a)}$
2) Benyt denne sammenhæng til at begrunde, at den afledede funktion af a^x er $a^x \cdot \ln(a)$
3) Bestem den afledede funktion af 10^x

Opgave 10 - differentiation af x^a

1) Begrund sammenhængen $x^a = e^{a \cdot \ln(x)}$, hvor *a* er et reelt tal og *x* er et positivt tal
2) Benyt sammenhængen ovenfor til at vise, at den afledede funktion af x^a er ax^{a-1}
3) Bestem den afledede funktion af x^π