

FOURIER/FREKVENSPANALYSE AF SAMPLEDE SIGNALER

af Børge L. Nielsen, Frederikssund Gymnasium

Indlægget omhandler frekvensanalyse af samplede periodiske signaler. Specielt behandles spektrenes frekvensopløsning, placeringen af højfrekvente signalkomponenter i (grund-)spektret, samt repræsentationen af de enkelte signalfrekvenskomponenter i det diskrete Fourierspektrum. Disse forhold illustreres af målinger med A/D-converter og analyseresultaterne fra disse.

1. Måle- og analysesystemet.

Systemet er illustreret på fig. 1.

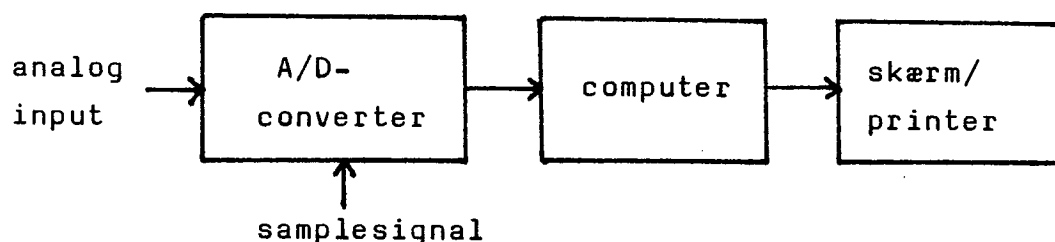


fig.1

Det analoge inputsignal er naturligvis kontinuert i både tid og amplitude. Samplesignalet - som her består af en række pulser med samme tidsmellemlængde Δt - giver A/D-converteren besked om at omsætte inputspændingen til et helt tal, som så efterfølgende læses ind i computerens hukommelse. (Der er her tale om en 12-bit converter - altså vil inputspændingen blive repræsenteret af et tal mellem 0 og 4095).

Efter passagen af A/D-converteren er signalet følgelig diskret i både tid og amplitude. Dette til tal omsatte signal kan så analyseres ved hjælp af et passende program og resultaterne udskrives på skærm eller printer.

Det her anvendte analyseprogram bygger på den såkaldte FFT-algoritme (Fast Fourier Transform) med grundtal 2 - det sidste betyder, at der kun analyseres på datasæt bestående af $N = 2^m$ tal, hvor m er et naturligt tal. En Pascal-procedure, der udfører dette, er anført i ref.1. Baggrunden for algoritmen er gennemgået i ref.2 og ref.3.

A/D-converteren er hjemmestrikket - computeren en Piccolo. Dog er dataanalysen foretaget på en Partner.

2. Den diskrete Fouriertransformation.

Teorien for den diskrete Fouriertransformation er at finde i referencerne, men skal kort resumeres her.

Vi antager, at vi har samplet inputsignalet $x(t)$ til de ækvivalente tidspunkter $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{N-1}$ - alle med tidsmellemrummet Δt . Antager vi så, at x er periodisk med perioden $T = N \cdot \Delta t$ - altså den samlede måletid - kan x opløses i harmoniske svingninger:

$$x(t_j) = x(j \cdot \Delta t) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{i2\pi \frac{n}{N} \cdot j}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1)$$

hvor Fourierkoefficienterne a_n er givet ved

$$a_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x(t_j) e^{-i2\pi \frac{n}{N} \cdot j}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2)$$

Omskrivningen $\frac{n}{N} \cdot j = \frac{n}{N \cdot \Delta t} j \cdot \Delta t = n \cdot \frac{1}{T} \cdot t_j$ viser, at a_n er koefficienten svarende til den harmoniske svingning med frekvensen $n \cdot \frac{1}{T}$. Vi ser altså, at Fourierkoefficienterne har en frekvensafstand, der er den reciprokke af den samlede måletid. Ønskes en god frekvensopløsning, må den samlede måletid altså ikke være for kort.

Af (2) ser vi, at der er lige så mange Fourierkoefficienter som der er målte spændinger. Det er imidlertid ikke dem alle, der indeholder ny information, idet $a_{N-n}^* = a_n$ forudsat x er reel - og det er x her. Derfor indeholder koefficienterne $a_0, a_1, \dots, a_{N/2}$ hele frekvensinformationen fra det samlede signal - svarende til frekvenser fra 0 til $\frac{N}{2} \frac{1}{T} = \frac{1}{2 \cdot \Delta t}$ - altså til det halve af samplefrekvensen $f_s = \frac{1}{\Delta t}$. Det betyder altså, at der skal måles mindst to gange i hver periode af enhver frekvenskomponent i signalet - ellers vil den pågældende frekvens i det samplede signal "se ud som" en lavere frekvens.

Den halve samplingsfrekvens vil vi her betegne f_{\max} , og

$$f_{\max} = \frac{f_s}{2} = \frac{1}{2\Delta t} \quad (3)$$

f_{\max} kaldes ofte for foldningsfrekvensen, af grunde, som fremgår nedenfor. Frekvensområdet fra 0 til f_{\max} kaldes grundspektret.

2A. Placering af højfrekvente signalkomponenter i spektret.

Hvis signalet indeholder frekvenskomponenter med frekvenser højere end foldningsfrekvensen f_{\max} , vil denne frekvensinformation blive placeret et sted i grundspektret - altså ved en ukorrekt frekvens!

Frekvenskomponenterne vil blive "foldet tilbage" i grundspektret som vist på fig. 2.

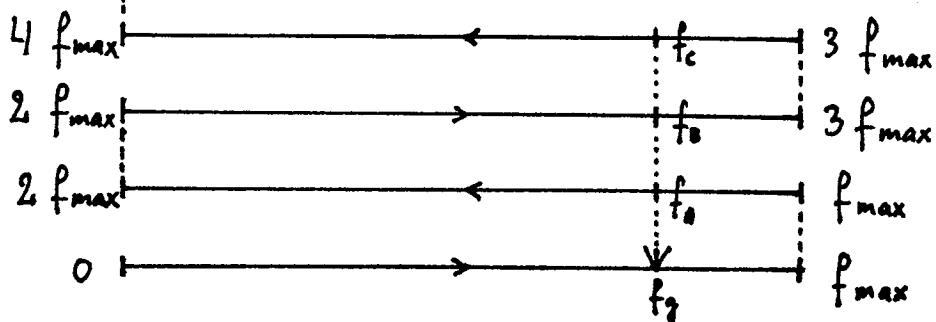


fig.2

Foldning af frekvensspektret.

Frekvenserne f_A , f_B , f_C findes i grundspektret ved frekvensen f_g .

Er f.eks $\Delta t = 50 \mu s$, er $f_{\max} = \frac{1}{2 \cdot \Delta t} = 10000 \text{ Hz}$. Indeholder signalet nu en komponent med frekvensen 12000 Hz , vil denne blive placeret ved frekvensen $10000 \text{ Hz} - (12000 - 10000) \text{ Hz} = 8000 \text{ Hz}$.

Årsagen til dette er antydnet på fig 3.

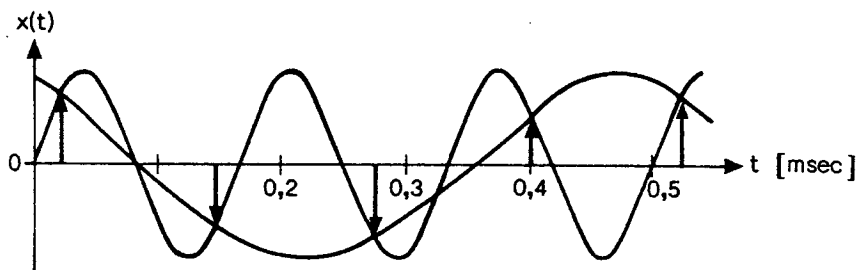


fig.3

Et 6 kHz signal er samlet med samplefrekvensen 8 kHz . Sampletidspunkterne er antydnet ved pile. Grundspektret er i dette tilfælde frekvensområdet fra 0 til 4 kHz . 6 kHz -komponenten vil blive placeret ved $4 \text{ kHz} - (6 \text{ kHz} - 4 \text{ kHz}) = 2 \text{ kHz}$. Det fremgår nemlig af fig.3, at de samlede værdier "ligner" et 2 kHz signal - som også er indtegnet sammen med det korrekte 6 kHz - signal.

Ønsker man at undgå disse højfrekvente komponenter i spektret, kan man placere et lavpas-filter ved indgangen til A/D-converteren - hvis den ikke har indbygget en sådan i forvejen.

Selvom disse frekvenskomponenter er placeret udfor en forkert frekvens, er det alligevel muligt at bestemme de korrekte frekvenser. Dette kan gøres ved at måle to gange på det samme signal - dog med lidt forskellig værdi af Δt - og dermed lidt forskellig samplingsfrekvens (og foldningsfrekvens). Kaldes forskellen i samplefrekvens $\Delta f_s (= 2 \cdot \Delta f_{\max})$, vil signalfrekvenser fra (ca.) f_{\max} til $2 f_{\max}$ forskydes Δf_s op i frekvens, fra $2 f_{\max}$ til $3 f_{\max}$ vil de forskydes Δf_s ned i frekvens, fra $3 f_{\max}$ til $4 f_{\max}$ forskydes de $2 \cdot \Delta f_s$ op, fra $4 f_{\max}$ til $5 f_{\max}$ $2 \cdot \Delta f_s$ ned osv., jvf. fig. 2. Via denne observation kan de korrekte frekvenser bestemmes.

2B. Repræsentation af signalfrekvenser i det diskrete Fourierspektrum.

Som det blev bemærket i kommentarerne til ligning (1), er det en forudsætning for denne, at signalerne er periodiske indenfor den samlede måletid T . I så fald vil de enkelte Fourierkoefficienter korrekt repræsentere "vægtene" (og faserne) af de pågældende signalfrekvenser. Men det er lidet sandsynligt, at alle de i signalet indeholdte svingninger netop er periodiske i tiden T - og dermed vil frekvenserne ikke svare til de diskrete frekvenser $n \cdot \frac{1}{T}$, der optræder i Fourierspektret. I dette tilfælde vil frekvensinformationen svarende til denne svingning spredes ud over flere Fourierkoefficienter med frekvenser omkring den rigtige frekvens f_0 . Den numeriske værdi af Fourierkoefficienterne vil ligge på en "indhyldningskurve" af formen

$$H(f) = |A_0| \cdot \left| \frac{\sin(\pi(f - f_0) \cdot T)}{\pi(f - f_0) \cdot T} \right| \quad (4)$$

$|A_0|$ er den numeriske værdi af den rigtige amplitude svarende til frekvensen f_0 . Årsagen til denne "liniebredde" er den endelige måletid T ("tidsvinduet"). Funktionen (4) kaldes undertiden "det spektrale vindue".

Hvis vi bruger blot to Fourierkoefficienter tæt på "toppen", giver (4) ligningerne

$$H(n \cdot \frac{1}{T}) = |a_n| \quad \text{og} \quad H(m \cdot \frac{1}{T}) = |a_m|$$

Dette giver 2 ligninger med de to ubekendte f_0 og A_0 .

Hvis vi bruger to Fourierkoefficienter på hver sin side af f_0 (som altid kan vurderes til at ligge mellem to frekvenser $i \cdot \frac{1}{T}$ og $(i+1) \cdot \frac{1}{T}$ - vurderet udfra beliggenheden af de største Fourierkoeff.), giver ovenstående ligninger formlen

$$f_0 = \frac{|a_n| \cdot n + |a_m| \cdot m}{|a_n| + |a_m|} \cdot \frac{1}{T} \quad (5a)$$

Benyttes koefficienter på samme side af f_0 , fås

$$f_0 = \frac{|a_n| \cdot n - |a_m| \cdot m}{|a_n| - |a_m|} \cdot \frac{1}{T} \quad (5b)$$

Efter således at have bestemt f_0 , kan så den korrekte amplitude $|A_0|$ bestemmes udfra en af de ovenstående ligninger:

$$|A_0| = |a_n| \left| \frac{\pi(n \cdot \frac{1}{T} - f_0)}{\sin(\pi(n \cdot \frac{1}{T} - f_0))} \right| \quad (6)$$

Er a_n her den største Fourierkoefficient tæt på f_0 , ser vi af (6), at "korrektionen" på $|a_n|$ højst er en faktor $\pi/2$ - nemlig i det tilfælde, hvor f_0 "falder" præcis mellem to spektralfrekvenser.

3. Målinger og analyseresultater.

Som første måling vises nedenfor et "firkant"-signal - genereret af en tonegenerator (fig.4). Dette signal har den indlysende fordel, at Fourierkoefficienterne er kendte på forhånd - og er derfor et godt testsignal. Fourierkoefficienterne er givet ved

$$|A_n| = \frac{1}{n} \quad , \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (7)$$

Altså kun ulige koefficienter.

Sample-frekvensen er 20000 Hz svarende til $\Delta t = 50 \mu s$. Frekvensspektret rækker derfor fra 0 til 10000 Hz. Der er målt ialt $16k = 2^{14}$ spændinger. Dette giver en samlet måletid på $T = N \cdot \Delta t = 0,8192$ sek., og en spektralopløsning på

$\frac{1}{T} = 1,2207 \text{ Hz}$ - altså en ganske god opløsning (frekvensspektret indeholder $8k = 2^{13}$ koefficienter).
 Frekvensspektret ses på fig.5.

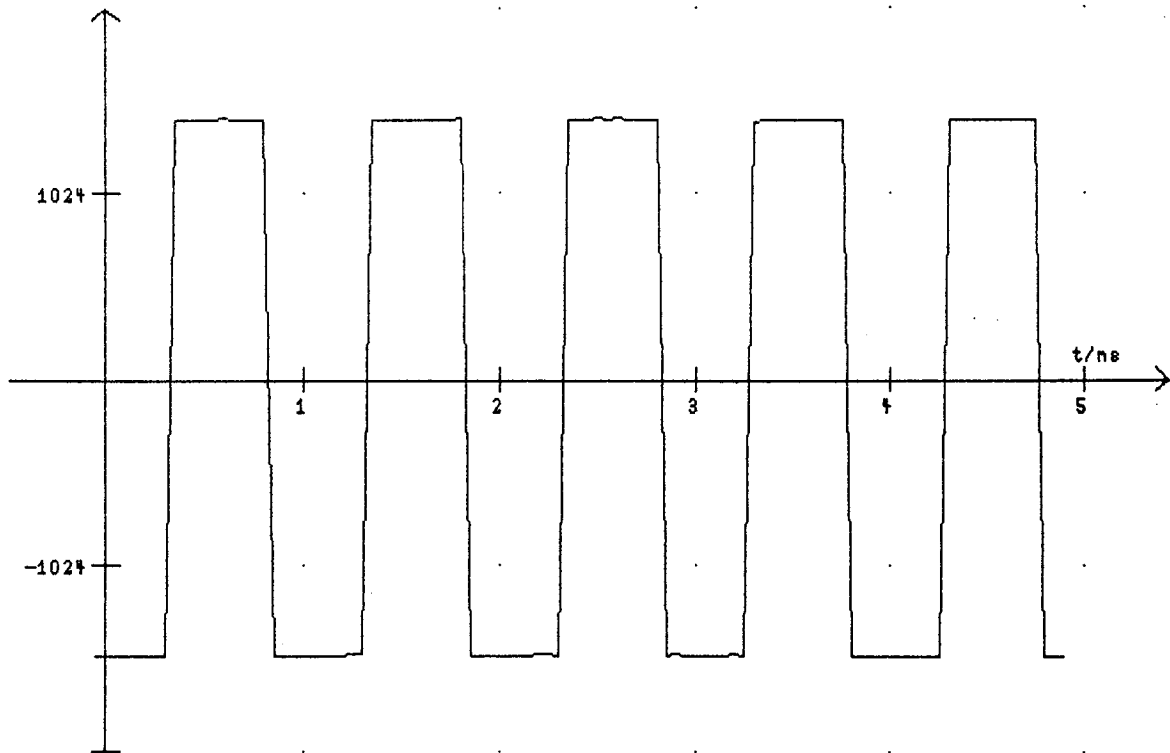


fig.4

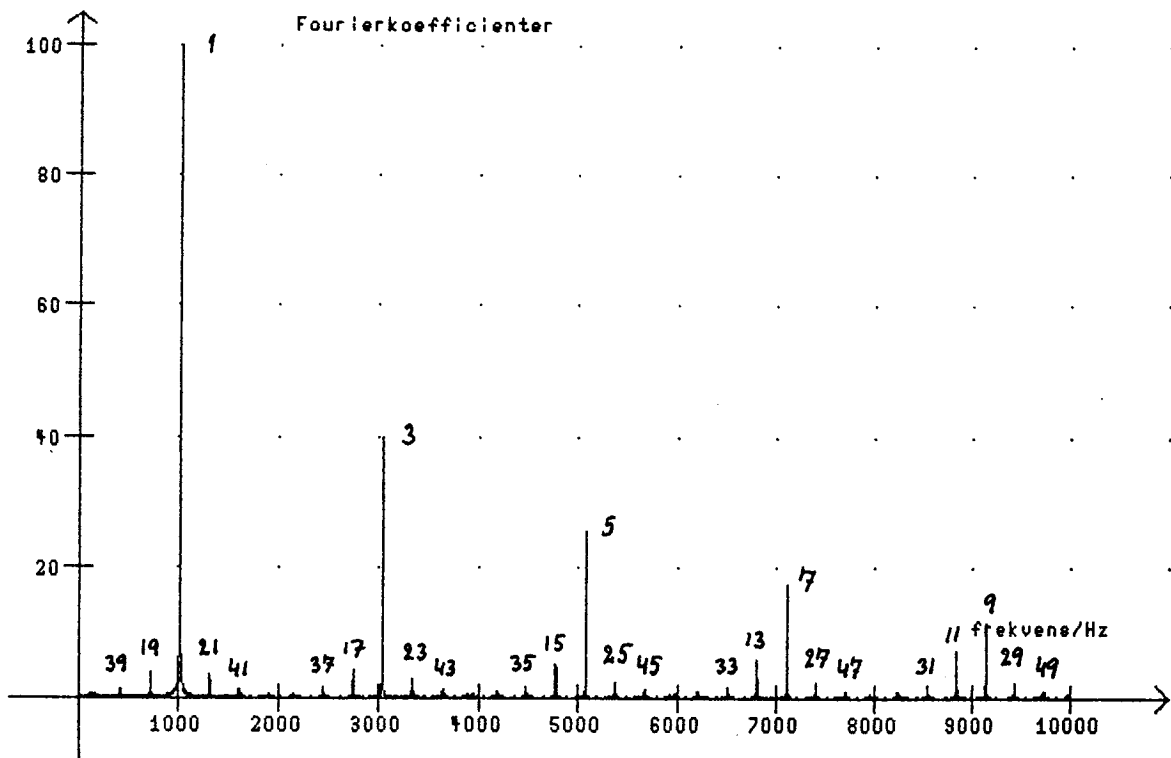


fig.5

På fig.5 er den numeriske værdi af Fourierkoefficienterne a_n afbildet som funktion af den tilhørende frekvens $n \cdot \frac{1}{T}$. Det fremgår af fig.5, at kun de ulige multipla af grundfrekvensen optræder - som forventet ifølge (7). Fourierkoefficienter svarende til multipla af grundfrekvensen på 1, 3, 5, 7, 9 er at finde i frekvensintervallet 0 - 10000 Hz, multipla på 11, 13, 15, 17, 19 er placeret "baglæns" i spektret fra 10000 Hz til 0 Hz (jvf. fig.2) - osv. Med lidt tålmodighed kan man identificere multipla op til mindst 81 af grundfrekvensen (her svarende til ca. 82 kHz).

Men passer det nu med frekvensforholdene 1:3:5:7 osv? Vi "zoomer" først ind på grundsvingningen på ca. 1000 Hz - se fig.6.

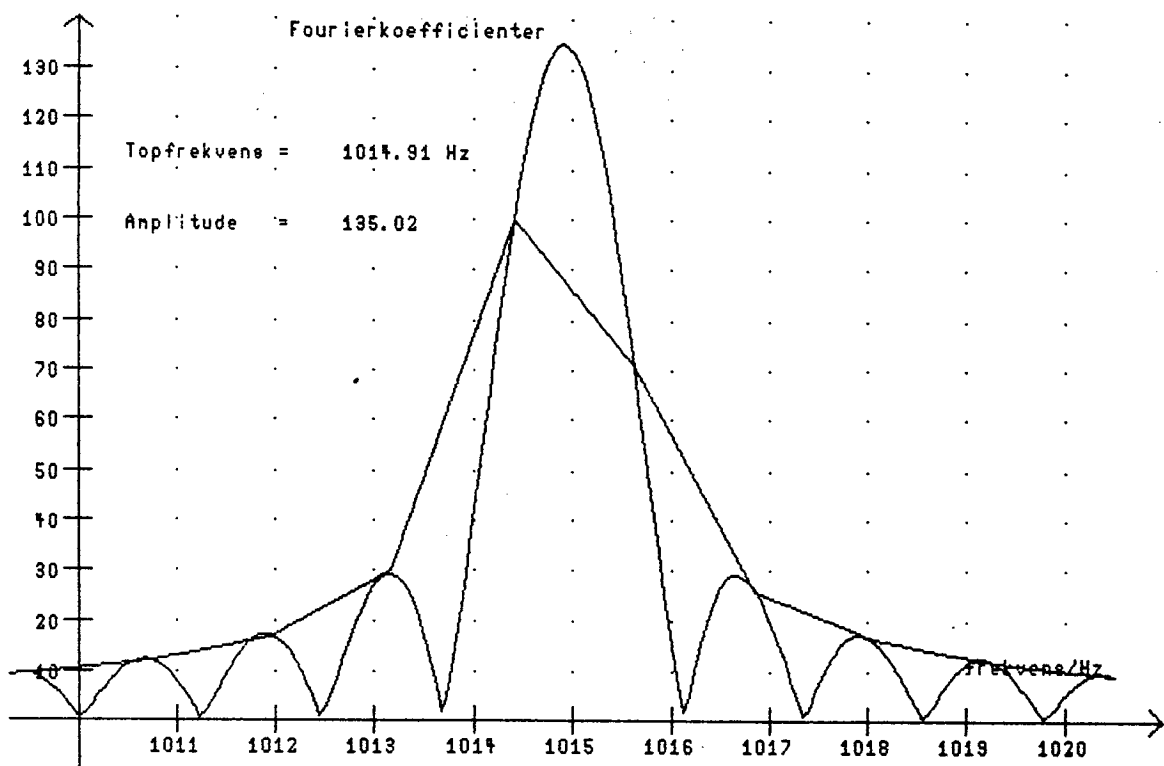


fig.6

Som det fremgår af denne, er punkterne $(n \cdot \frac{1}{T}, |a_n|)$ forbundne med rette liniestykker. Fourierkoefficienterne ('s numeriske værdier), der ligger til grund for denne afbildning, er vist i tabel 1 - sammen med de tilsvarende for de efterfølgende "toppe" (multipla 3, 5, 7, 9 af grundfrekvens).

n	$ a_n $
829	16.620457
830	29.999310
831	100.000000
832	70.733720
833	25.967874
2492	3.790019
2493	9.689598
2494	40.148787
2495	13.734964
2496	5.677437
4155	1.046298
4156	5.719749
4157	25.562252
4158	5.743655
4159	1.106080
5818	2.293935
5819	5.261404
5820	17.280250
5821	5.716841
5822	1.032556
7481	3.494830
7482	5.841475
7483	11.399283
7484	5.619649
7485	1.731402

Fourierkoefficienterne er normerede, således at den (numerisk) største har den numeriske værdi 100.

Numrene 831 og 832 svarer til Fourierkoefficienter på hver side af grundfrekvensen f_1 , og vi benytter derfor formel (5a) til bestemmelse af f_1 :

$$f_1 = \frac{(|a_{831}| \cdot 831 + |a_{832}| \cdot 832)}{|a_{831}| + |a_{832}|} \cdot \frac{1}{0,8192 \text{ s}}$$

$$= 1014,91 \text{ Hz}$$

Tilsvarende finder vi

$$f_3 = 3044,75 \text{ Hz} \quad f_5 = 5074,7 \text{ Hz}$$

$$f_7 = 7104,8 \text{ Hz} \quad f_9 = 9134,1 \text{ Hz}$$

Disse skal sammenlignes med

Tabel 1

$$3 \cdot f_1 = 3044,73 \text{ Hz} \quad 5 \cdot f_1 = 5074,6 \text{ Hz}$$

$$7 \cdot f_1 = 7104,4 \text{ Hz} \quad 9 \cdot f_1 = 9134,2 \text{ Hz}$$

- man ser en god overensstemmelse.

Når frekvenserne f_1 , f_3 osv. er bestemt, kan de relative amplituder af svingningerne bestemmes ud fra formel (6):

$$|A_1| = |a_{831}| \cdot \left| \frac{\pi(f_1 - \frac{831}{0,8192 \text{ s}}) \cdot 0,8192 \text{ s}}{\sin(\pi(f_1 - \frac{831}{0,8192 \text{ s}}) \cdot 0,8192 \text{ s})} \right| = 135,0$$

Tilsvarende

$$|A_3| = 44,8 \quad |A_5| = 27,0 \quad |A_7| = 19,2 \quad |A_9| = 13,9$$

Forholdene $|A_n|/|A_1|$ udregnes:

$$\frac{|A_3|}{|A_1|} = 0,332 \sim \frac{1}{3} \quad \frac{|A_5|}{|A_1|} = 0,200 \sim \frac{1}{5} \quad \frac{|A_7|}{|A_1|} = 0,142 \sim \frac{1}{7} \quad \frac{|A_9|}{|A_1|} = 0,103 \sim \frac{1}{9}$$

Der er altså rimelig overensstemmelse med det forventede (7).

Når f_1 og $|A_1|$ er beregnede, kan funktionen $H(f)$ (se (4)) indtegnes i spektret, og dette ses gjort på fig.6. Det fremgår, at Fourierkoefficienterne $a_{827} - a_{836}$ vist på fig.6 kun indeholder information om svingningen ved 1014,91 Hz, idet Fourierkoefficienternes numeriske værdier præcis ligger på grafen for $H(f)$.

Den anden og sidste måling vedrører to stemmegafler med lidt forskellig frekvens (svævninger). Stemmegaflernes frekvenser har jeg målt med frekvensmåler til hhv. 430,07 Hz og 440,75 Hz.

Fig. 7 og 8 viser det målte signal i de første hhv. 250 ms og 15 ms. Svævningerne fremgår tydeligt af fig. 7, medens fig. 8 viser, at der i signalet også er indeholdt høje frekvenser. Dette sidste skyldes, at stemmegaflerne blev anslået med en hård ebonitstang.

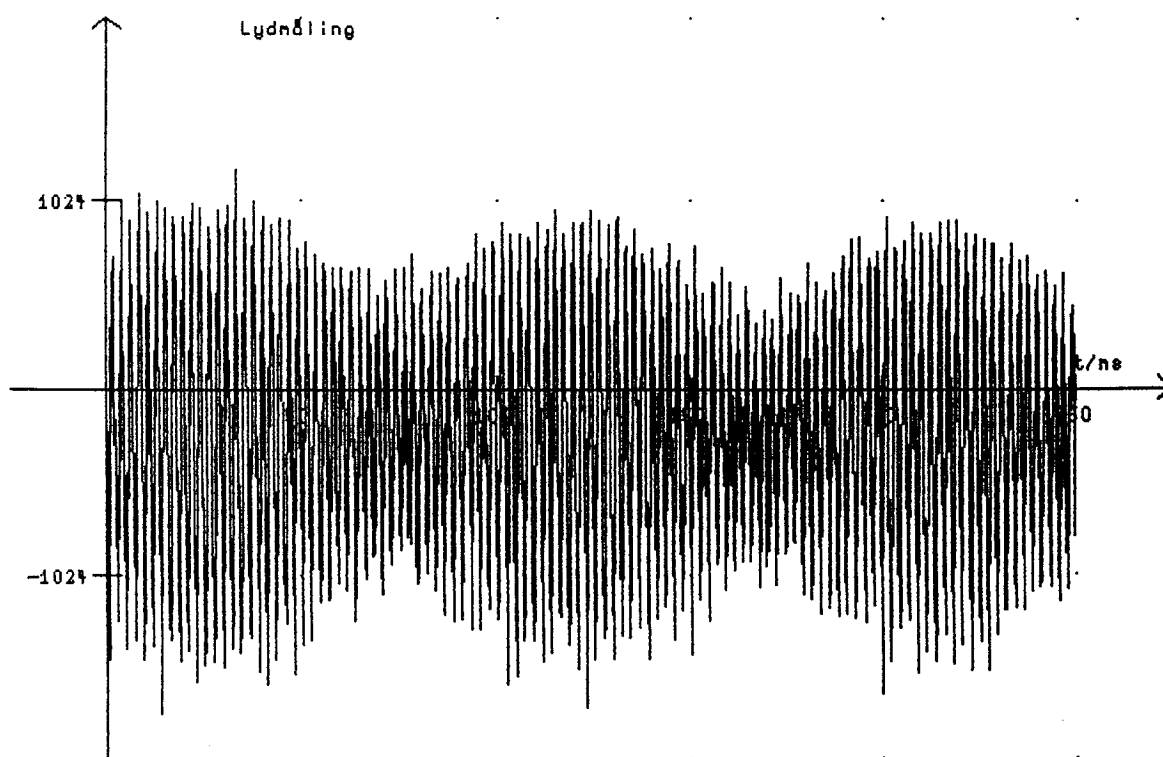


fig. 7

Som det fremgår af fig. 9, kan de to stemmegaflers frekvenser fint adskilles. Regnes på Fourierkoefficienterne, finder jeg frekvenserne 430,00 Hz og 440,82 Hz - i god overensstemmelse med de målte.

(Der er her igen målt 2^{14} spændinger med $\Delta t = 50 \mu s$ - og dermed samme frekvensopløsning).

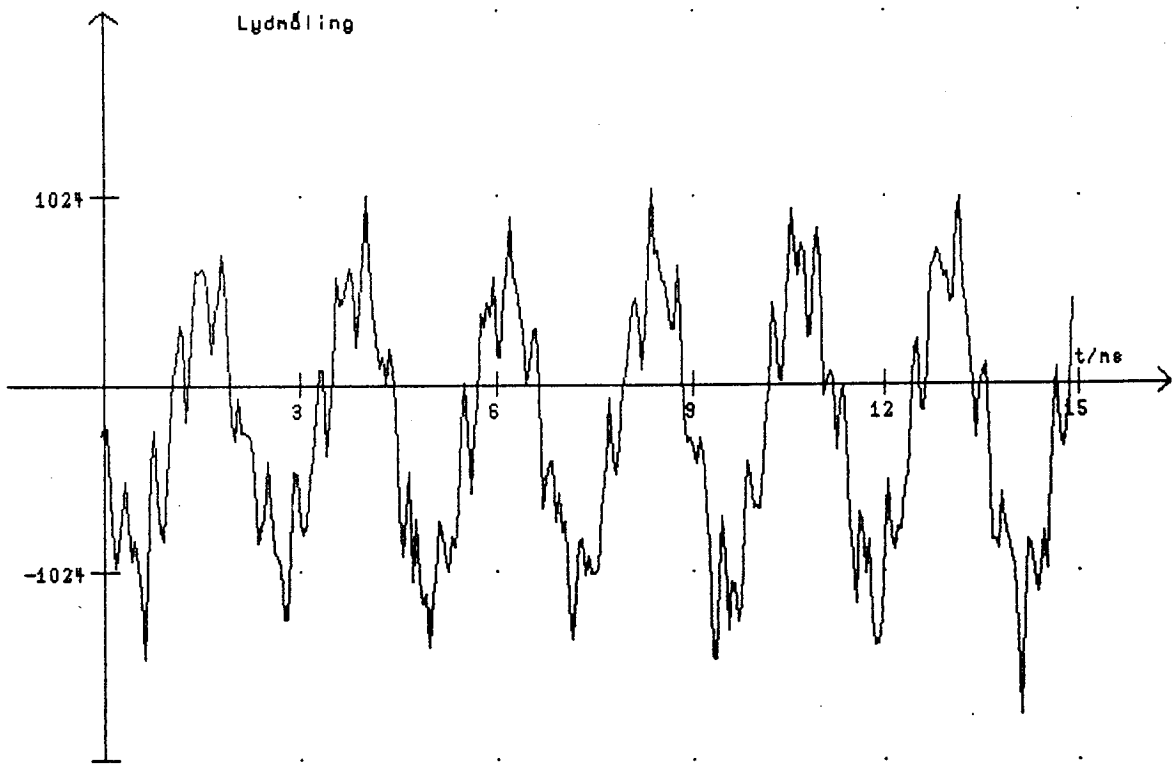


fig. 8

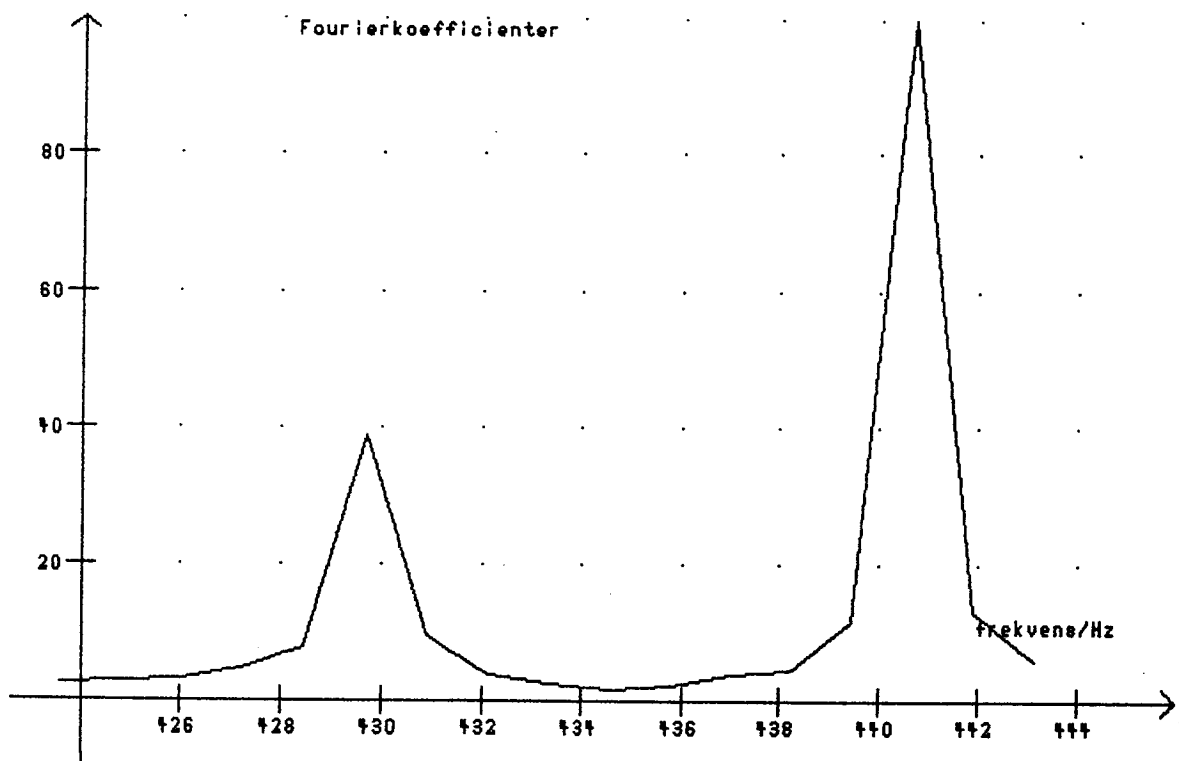


fig. 9

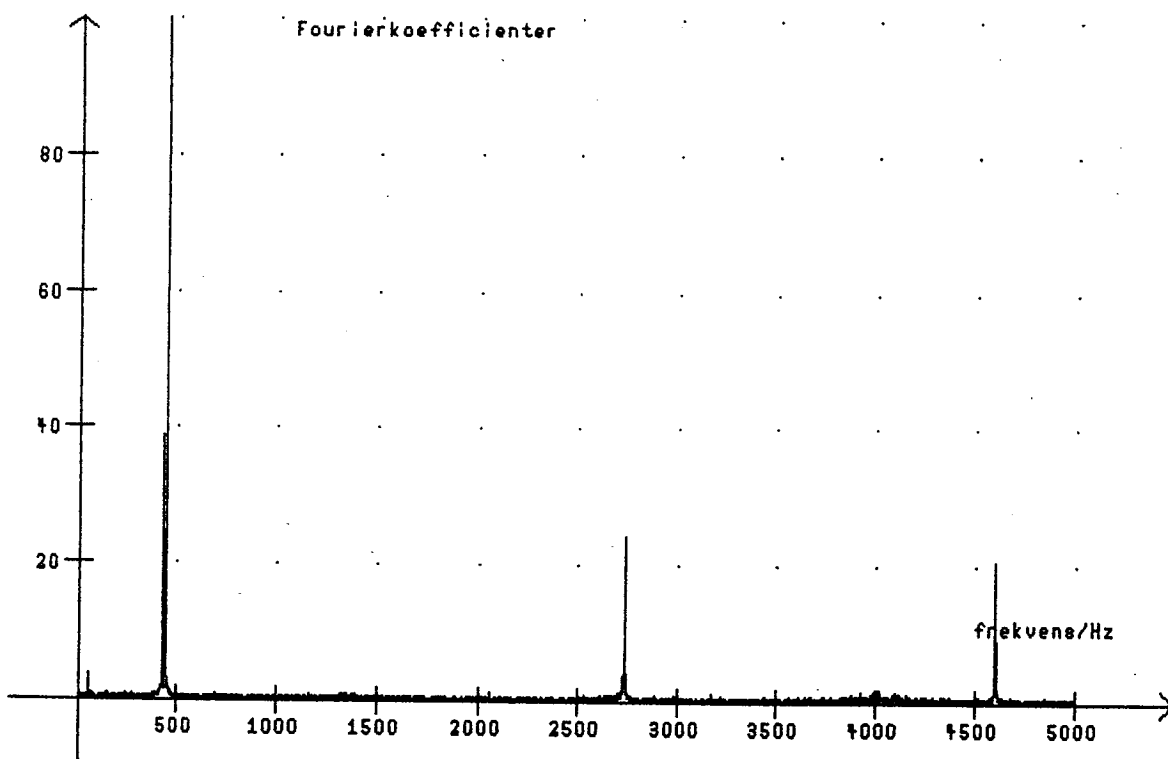


fig. 10

Halvdelen af grundspektret ses på fig.10 ovenfor. De to stemmegaflers grundsvingninger ses ved ca. 500 Hz. De højfrekvente svingninger ses også - beliggende ved 2735 Hz, 4599 Hz og (ikke vist) 9198 Hz. Desuden ses en lille top ved præcis 50 Hz - netstøj.

Som det forhåbentlig er fremgået af ovenstående, er det muligt i Fourieranalysen at opnå en ganske god frekvensopløsning af et signal, hvis størrelsen $N \cdot \Delta t = T$ er passende stor. Det er derfor ikke altid en fordel at måle så hurtigt som muligt - idet der jo så kræves en tilsvarende forøget værdi af N - og dermed forøget krav til computerens hukommelse i analysefasen samt en forøget analysetid - for stadig at have en god frekvensopløsning.

På den anden side vil en større værdi af Δt måske give en for lille værdi af foldningsfrekvensen f_{\max} ifølge (3) - hvis hele signalets frekvensinformation skal være indeholdt i grundspektret.

De her valgte værdier $N = 2^{14}$ (og $\Delta t = 50 \mu s$) giver en analysetid på ca. 8 min. på en Partner - og er efter min erfaring rimeligt proportional med N (teoretisk $N \cdot \log N$).

Også de relative amplituder af de forskellige frekvenskomponenter er det muligt at bestemme - også her er det af afgørende betydning med en god frekvensopløsning - således at de enkelte "toppe" i spektret ikke skjuler flere forskellige svingninger.

Referencer:

- 1) LMFK 1984 nr.8
- 2) Diskrete Fouriertransformationer - noter fra Numerisk Institut, DTH, hæfte 37.
- 3) Erik Hüche: Digital signalbehandling, Teknisk Forlag 1986