Parabler, toppunkter og rødder

- fra borgeleo.dk

Grafen for funktionen

$$f(x) = a \cdot x^2 \qquad \text{graf har toppunkt i } (0,0) \qquad (1)$$

er en parabel med toppunktet (0,0).

Ønsker vi en parabel med toppunkt (x_{top}, y_{top}), kan vi ændre på forskriften i (1) på følgende måde:

$$g(x) = a \cdot (x - x_{top})^2 + y_{top} \qquad \text{graf har toppunkt i } (x_{top}, y_{top}) \qquad (2)$$

Opgave 1:

a) Tegn grafen for funktionen med forskriften $f(x) = x^2$
b) Hvad er toppunktet for denne parabel?

Nu skal du 'flytte' denne parabel, så den har toppunktet (3,2)

c) Opskriv forskriften $g(x)$ for den funktion, du skal tegne, se (2) ovenfor
d) Tegn grafen for $g(x)$ i samme koordinatsystem som grafen for $f(x) = x^2$. Passer det, at parablen har toppunktet (3,2) hvis man kigger på din graf?
e) Reducer forskriften for $g(x)$, så du kan aflæse tallene a, b og c
f) Brug tallene a, b og c til at beregne toppunktets koordinater. Stemmer det med det toppunkt, du allerede kender?

Opgave 2 - bevis for toppunktets koordinater

Vi ser igen på grafen for funktionen $f(x) = a \cdot x^2$, der har toppunkt i (0,0).

Vi ønsker nu at 'flytte' denne graf til toppunktet med koordinaterne $(x_{top}, y_{top}) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a})$, hvor *d* er betegnelsen for $d = b^2 - 4ac$.

Vi vil vise, at den 'flyttede' parabel er grafen for funktionen $g(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, sådan at tallene b og c har den normale betydning i forskriften.

Den 'flyttede' parabel har forskriften

$$g(x) = a \cdot (x - x_{top})^2 + y_{top} \qquad \text{parabel med toppunkt } (x_{top}, y_{top})$$

Her indsætter vi $(x_{top}, y_{top}) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a})$:

$$g(x) = a \cdot (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{d}{4a} \qquad \text{parabel med toppunkt } (-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a})$$

a) Begrund, at det er rigtigt
b) Vis, at funktionen $g(x)$ herover kan omskrives til $g(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. Ikke helt let!

Hermed har vi vist, at formlerne for toppunktets koordinater er rigtige, altså at funktionen $g(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ har toppunktet $\left(x_{top}, y_{top}\right) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a})$!

Og hvordan så med rødder? Vi tager udgangspunkt i udtrykket ovenfor (som vi lige har argumenteret for)

$$g(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c = a \cdot (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{d}{4a}$$

Og skal løse ligningen $g(x) = 0$:

$$g(x) = a \cdot (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{d}{4a} = 0$$

hvoraf

$$a \cdot (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{d}{4a}$$

Vi deler med a på begge sider:

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{d}{4a^2} \qquad (3)$$

Heraf ser vi, at der ingen løsninger er, hvis diskriminanten d er negativ, idet jo venstresiden ikke kan blive negativ – som højresiden er det i dette tilfælde.

Altså:

$$d < 0: \quad \text{ingen løsinger}$$

Vi forudsætter derfor herefter, at d er 0 eller derover (ikke-negativ). Herved er der to løsninger til ligning (3):

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{d}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{d}}{2a}$$

hvoraf endelig

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{d}}{2a}$$

og altså har vi vist at løsningerne i dette tilfælde er

$$d \geq 0: \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$

Hermed er løsningsformlen for 2. gradsligningen $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ bevist