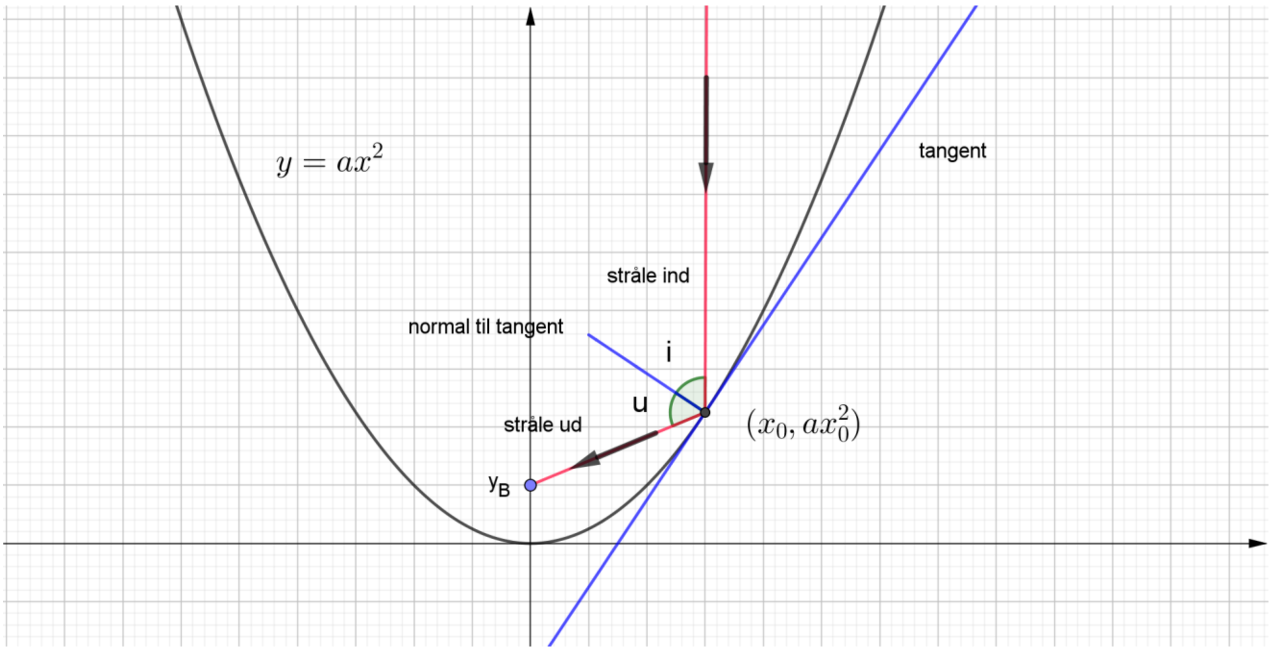
Temaopgave - brændpunkt for parabel

- fra www.borgeleo.dk

Parablen med ligningen $y = a \cdot x^2$ har en særlig egenskab, den har nemlig et punkt der benævnes *brænd-punkt* (engelsk: *focal point*). Hvis man forestiller sig, at parablens 'inderside' belægges med spejlende materiale (fx sølv), så vil stråler, der kommer ind parallelt med y-aksen og 'spejles' i parablens overflade, alle samles i samme punkt – det såkaldte brændpunkt. Dette punkt må af symmetrigrunde ligge på y-aksen. Det bruges i fx paraboler, hvor modtagerantennen så anbringes i brændpunktet. Eller i en projektør, hvor lampen anbringes i brændpunktet, og parabolen vil så give et parallelt strålebundt, der kan rettes mod det, der ønskes belyst.

Men hvordan kan man regne sig frem til eksistensen og beliggenheden af dette punkt når du har en given parabel? Det er netop det, denne opgave drejer sig om.



Figur 1: den indkommende stråle spejles i tangenten og rammer i brændpunktet

På figur 1 ses en indkommende stråle. Denne rammer parablen i punktet $P(x_0, a \cdot x_0^2)$. Her spejles strålen i parablen (det er matematisk lettere at se på spejlingen det 'flade' spejl, nemlig tangenten til parablen i punktet $P(x_0, a \cdot x_0^2)$, med indfaldsvinklen *i*, der måles i forhold til normalen til spejlet (her normalen til tangenten) og den spejlede stråle har så en udfaldsvinkel *u*, der ifølge spejlingsloven er lig med indfaldsvinklen.

Spejlingsloven: $u = i$

Altså er vinklen mellem den indgående stråle og normalen til tangenten er lig med vinklen mellem den udgående stråle og normalen til tangenten.

Og dermed er cosinus til disse to vinkler naturligvis også ens!

Retningsvektor for den lodrette stråle er (retningen, strålen kommer fra)

$$\vec{r}_{lod} = \binom{0}{1}$$

Retningsvektor for tangenten kan findes ved først at differentiere funktionen $y = a \cdot x^2$:

$$y' = 2ax$$

Hermed kan vi opskrive en retningsvektor for tangenten i punktet $(x_0, a \cdot x_0^2)$:

$$\vec{r}_{tang} = \binom{1}{2ax_0}$$

a) Begrund, at dette er en retningsvektor for tangenten!

Og dermed kan vi opskrive koordinaterne for normalvektoren til tangenten (tværvektoren til $\vec{r}_{tang}$)
$\vec{n}_{tang} = \binom{?}{?}$

b) Gør det!

Den spejlede stråle går gennem de to punkter $P(x_0, a \cdot x_0^2)$ og $B(0, y_B)$ hvor y_B er brændpunktets y-værdi.

c) Opskriv herfra koordinaterne for retningsvektoren $\vec{r}_{ref} = \overrightarrow{PB}$ for den spejlede stråle (ref betyder her reflekteret = spejlet)

Tjek med figur 1 ovenfor.

Kaldes som ovenfor indfaldsvinklen *i* og udfaldsvinklen *u*, er

$$\cos(i) = \frac{\vec{r}_{lod} \cdot \vec{n}_{tang}}{|\vec{r}_{lod}| \cdot |\vec{n}_{tang}|}$$

og

$$\cos(u) = \frac{\vec{r}_{ref} \cdot \vec{n}_{tang}}{|\vec{r}_{ref}| \cdot |\vec{n}_{tang}|}$$

Da $u = i$ (spejlingsloven), følger det, at

$$\cos(u) = \cos(i)$$

d) Opskriv denne ligning med vektorer og vis, at ligningen kan reduceres til

$$\frac{\vec{r}_{ref} \cdot \vec{n}_{tang}}{|\vec{r}_{ref}|} = \frac{\vec{r}_{lod} \cdot \vec{n}_{tang}}{|\vec{r}_{lod}|}$$

e) Vis desuden, at $|\vec{r}_{lod}| = 1$, og $\vec{r}_{lod} \cdot \vec{n}_{tang} = 1$

f) Vis, at ligningen ovenfor herved reduceres til $\vec{r}_{ref} \cdot \vec{n}_{tang} = |\vec{r}_{ref}|$

g) Vis ved indsættelse af koordinater, at denne ligning omformes til

$$2ax_0^2 + y_B - ax_0^2 = \sqrt{x_0^2 + (y_B - ax_0^2)^2}$$

eller (reduceret):

$$ax_0^2 + y_B = \sqrt{x_0^2 + (y_B - ax_0^2)^2}$$

h) Opløft denne sidste ligning til 2. potens på begge sider og reducer – vis herved, at

$y_B = \frac{1}{4a}$ ***Formel for brændpunkts beliggenhed på y-aksen***

Beregning af beliggenhed af brændpunkt:

i) Ligningen for en parabel er givet ved $y = 0{,}25 \cdot x^2$. Beregn beliggenheden af brændpunktet.

j)

En parabolantenne har diameteren 100 cm, og dybde 10 cm. Beregn ved hjælp af formlen ovenfor afstanden fra parabolens bund til brændpunktet, hvor modtageren skal placeres.