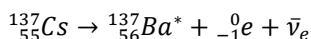


## Betahenfald af $^{137}\text{Cs}$ , gammahenfald af $^{137}\text{Ba}^m$ - mm

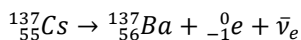
Mange har i tidens løb lavet øvelsen med bestemmelse af halveringstid med denne kilde, der dannes ved et beta-minus-henfald af Cs-137. Gamma-energien for den exciterede tilstand i Ba-137 er 0,662 MeV. Tilstanden betegnes som metastabil (m) eller isomer fordi halveringstiden er lang for et gammahenfald. Hvorfor er denne halveringstid så lang? Og hvordan kan dette henfald forstås hvis vi tænker på atomkernen i termer af proton- og neutron-orbitaler? Det handler dette skriv om.

Hertil er en bemærkning om enkeltpartikel-modellen for atomkerner på sin plads: i denne model bevæger nukleonerne sig i et sfærisk middelpotential fra de øvrige nukleoner, neutroner og protoner i hver deres separate potentialer. Protonpotentialet inkluderer Coulombfrastødningen mellem protonerne. Nukleonerne er fermioner, og i hver rumlig bane er der derfor plads til max to nukleoner af samme 'køn', med modsatte spin. Hvis kernen har et ulige neutrontal og et lige protontal (som fx Ba-137), er kernens impulsmoment og paritet bestemt af den uparrede neutron. Mere herom nedenfor.

Henfaldsskemaet for betahenfaldet er enten

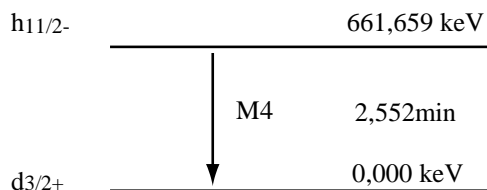


eller



hvor bariumpkernen lander direkte i sin grundtilstand.

Henfaldsskemaet for  $\gamma$ -henfaldet ser normalt sådan her ud:



Figur 1: Henfaldsskema for  $^{137}\text{Ba}^m$

Vi går i detaljer med både kernetilstandene og størrelsen af halveringstiden nedenfor:

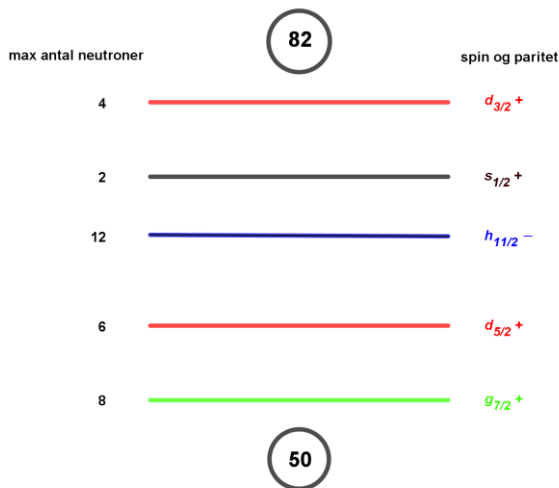
## Skalstruktur - enkeltpartikelmodel

Men hvad har det med kernestruktur at gøre? De anførte spin og paritetsværdier er gældende for bariumm-kernen, og kan i det væsentlige beskrives som en exciteret ( $h_{11/2^-}$ ) neutrontilstand og den mest energirige grundtilstandsorbital ( $d_{3/2^+}$ ) for kernens neutroner.

Cæsium-kernen har 82 neutroner og 55 protoner, hvor bariumm-kernen har 81 neutroner og 56 protoner.

$N = 82$  er et af de såkaldte magiske tal, en særlig stabil neutronkonfiguration, jf. kemiens ædelgasser. Den sfæriske enkeltpartikelmodel er kun brugbar for kerner, der har neutron/protonantal i nærheden af de magiske tal 2, 8, 20, 28, 40, 50, 82, 126. Langt fra disse tal er kernen ikke sfærisk!

På figur 2 nedenfor ses et energidiagram for neutronorbitaler for kerner med neutronantal mellem 50 og 82. I kernen Cs-137 er alle disse orbitaler fyldt med max antal neutroner.



Figur 2: neutron-orbitaler for kerner med neutronantal mellem 50 og 82

Ved betaminus henfaldet af Cs-137 er det en af neutronerne i orbitalerne  $h_{11/2^-}$ ,  $s_{1/2^+}$  eller  $d_{3/2^+}$  der forsvinder (og omdannes til en proton, elektron og en anti-elektronneutrino). Herved opstår et neutronhul i en af disse orbitaler. Hvis det drejer sig om orbitalerne  $h_{11/2^-}$  eller  $s_{1/2^+}$ , vil en  $d_{3/2^+}$ -neutron besætte hullet, og en gammafoton vil (i de fleste tilfælde) udsendes.

Er hullet i  $d_{3/2^+}$ -orbitalen, er vi landet direkte i grundtilstanden for Ba-137.

Disse orbitaler med neutronhuller har samme spin og paritet som orbitalerne, de befinder sig i, fordi neutrontallet i orbitalen er blevet ulige – og derved er den eneste uparrede nukleon i denne skal. Det bemærkes, at protontallet for Ba-137 er lige (56), og det er derfor ikke protonerne der bestemmer kernens spin og paritet.

Man kan spørge, hvorfor det netop er neutronen i denne  $h_{11/2}$ -tilstand (eller  $s_{1/2}$ -tilstanden), der henfalder til protonen ved beta-minus-henfaldet eller, hvis henfaldet går direkte til grundtilstanden af Ba137, at det er en  $d_{3/2}$ -neutron, der henfalder til en proton. Svaret er, at netop disse neutronorbitaler har højere energi end den ubesatte protontilstand med lavest energi. Cs-137 er jo et fissionsprodukt med 'for mange' neutroner til at være stabil.

## Estimat af halveringstiden for Ba-137\*

Ved gamma-henfaldet sker der et stort skift i impulsmoment for neutronen, et skift på hele  $11/2\hbar - 3/2\hbar = 4\hbar$  som fotonen bærer bort. Desuden er overgangen af magnetisk natur (neutronen er en lille magnet), en såkaldt M4-overgang med paritets-skift. Disse forhold – sammen med den relativt lille overgangsenergi – forklarer, at overgangen har ringe sandsynlighed pr. tid og dermed en lang halveringstid.

Et estimat af henfaldskonstanter for elektriske overgange E1, E2,... og magnetiske overgange M1, M2,... er givet ved Weisskopfs estimater for enkeltpartikelovergange i tabel 1. Benyttet på den aktuelle kerne finder vi

$$k = 3,3 \cdot 10^{-6} A^2 \cdot E^9 = 3,3 \cdot 10^{-6} 137^2 \cdot 0,662^9 \text{ s}^{-1} = 0,0015 \text{ s}^{-1}$$

Og dermed 
$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(2)}{k} = 460 \text{ s} = 7,6 \text{ min}$$

hvor den eksperimentelle værdi er 2,552 min. Altså et rimeligt estimat! Det bemærkes, at havde overgangen været en E2-enkeltpartikelovergang – der naturligvis ikke kan give spin-skift på 4 – med den samme energi, er estimatet for halveringstiden  $4,8 \cdot 10^{-8}$  sekunder(!)

Den ret lille overgangssandsynlighed skyldes at begyndelses- og slutttilstand er så forskellige mht. spin. Bølgefunktionen for tilstanden med højt spin er mere 'koncentreret' mod kernens rand end for tilstanden med lavt spin – og vinkeldelen har mere struktur/fortegnsskift for det høje spin end for det lave. Herved bliver overgangssandsynligheden lille.

Langtlevende isomertilstande svarende til  $^{137}\text{Ba}^m$  finder man også i  $^{139}\text{Ce}$ , hvor  $T_{1/2} = 54,8 \text{ s}$ ,  $E_{\gamma} = 0,754 \text{ MeV}$  og i  $^{135}\text{Xe}$ ,  $T_{1/2} = 15,3 \text{ min}$ ,  $E_{\gamma} = 0,527 \text{ MeV}$  m.fl. – som alle også sker som M4-overgange. Check evt. selv, hvor godt estimaterne fra tabel 1 passer med disse halveringstider. Begyndelses- og slutttilstand har samme kvantetal som i  $^{137}\text{Ba}^m$

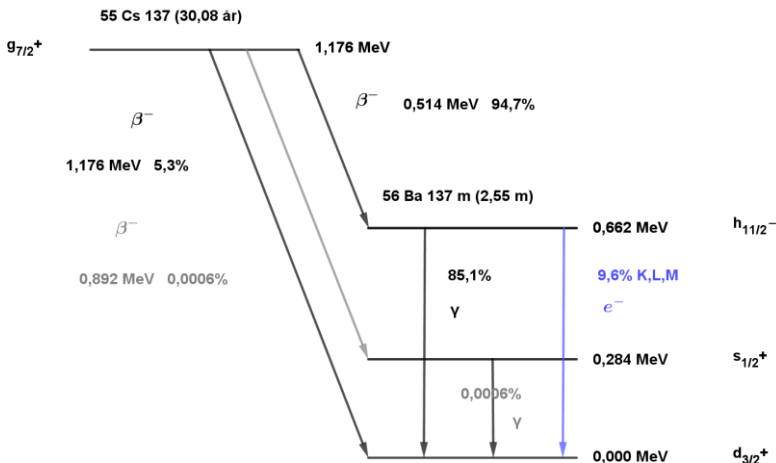
Overgang	Navn på overgang	Impulsmoment $L_{\text{foton}} (\hbar)$	Paritetsskift	$k$ i $\text{s}^{-1}$
E1	Elektrisk dipol	1	Ja	$1,0 \cdot 10^{14} A^{\frac{2}{3}} E^3$
M1	Magnetisk dipol	1	Nej	$3,1 \cdot 10^{13} E^3$

E2	Elektrisk kvadrupol	2	Nej	$7,4 \cdot 10^7 A^{\frac{4}{3}} E^5$
M2	Magnetisk kvadrupol	2	Ja	$2,2 \cdot 10^7 A^{\frac{2}{3}} E^5$
E3	Elektrisk octupol	3	Ja	$3,5 \cdot 10^1 A^2 E^7$
M3	Magnetisk octupol	3	Nej	$1,1 \cdot 10^1 A^{\frac{4}{3}} E^7$
E4	Elektrisk hexadecapol	4	Nej	$1,1 \cdot 10^{-5} A^{\frac{8}{3}} E^9$
M4	Magnetisk hexadecapol	4	Ja	$3,3 \cdot 10^{-6} A^2 E^9$

Tabel 1. Weisskopf estimer af overgangssandsynligheder pr. tid  $k$  for forskellige multipolordener  $L$  som funktion af massetal  $A$  og overgangsenergi  $E$  i MeV.

## Betahenfaldet af Cs-137 – mm

Nedenfor ses et relativt detaljeret henfaldsskema for henfaldet. Detaljerne omtales nedenfor.



Figur 3: henfaldsskema for Cs-137

Som det fremgår af figur 3, ender 94,7% af betaminus-henfaldene i den exciterede tilstand  $h_{11/2-}$ , og 5,3% i grundtilstanden  $d_{3/2+}$  for Ba-137.

Men ikke alle 94,7% af henfaldene til  $h_{11/2-}$  henfalder ved gammahenfald til grundtilstanden. De 9,6% (her i procenter af beta-minus henfaldene) sker ved IC – intern omdannelse – hvor overskudsenergien overføres til en af elektronerne i de inderste skaller i atomet, og hvor elektronen efterfølgende 'skydes' ud af atomet. Den kinetiske energi af elektronerne er dog formindsket i

forhold til gamma-energien med elektronens bindingsenergi. De resterende 85,1% sker ved gammahenfald.

Faktisk kan henfaldet fra  $h_{11/2^-}$  til grundtilstanden også ske ved en  $2\gamma$  – proces (ikke vist på figuren). Sandsynligheden for dette er dog ubetydelig ( $10^{-4}\%$ ). En ligeledes ubetydelig del af henfaldene lander i  $s_{1/2^+}$  tilstanden, der for det meste henfalder til grundtilstanden ved gammahenfald.

Men hvad nu med de tre beta-minushenfald der er vist på figur 3? Hvorfor er henfaldsraterne så forskellige og små (med den store halveringstid ca. 30 år)?

Hertil kan vi konstatere, at det er  $(e^-, \bar{\nu}_e)$ -parret fra beta-minus henfaldet, der skal levere forskellen i spin-værdi på kernernes begyndelses- og sluttilstand. De to partikler er som bekendt begge fermioner med spin  $1/2$ . De kan derfor tilsammen kun levere et spin på 0 eller 1. Og det er jo ikke nok når vi betragter beta-minus henfaldene fra  $g_{7/2^+}$  i Cs-137 til de tre mulige sluttilstande i Ba-137, se figur 3.

Hvordan kan henfaldet så ske? Det skyldes, at de to partikler (elektronen og neutrinoen) også samlet set kan have et bane-bevægelsesmængdemoment (puha), fx på 1 eller  $2\hbar$ . Dermed er vi ude i de såkaldte forbudte overgange (med meget lav sandsynlighed). Lidt løst sagt kan vi forestille os dette (klassisk) ved, at et bane-bevægelsesmængdemoment over  $0\hbar$  vil betyde, at partikelparret skydes af 'offcenter' i en vis afstand til kernens centrum.

Hvor stor er nu denne afstand (klassisk)? Lad os lave en lille beregning – og så sammenligne med kerneradius.

Først kerneradius:

$$r_{kerne} = 1,25 \text{ fm} \cdot A^{\frac{1}{3}} = 1,25 \text{ fm} \cdot (137)^{\frac{1}{3}} = 6,4 \text{ fm}$$

Vi ser så på betaminushenfaldet der går til den exciterede tilstand  $h_{11/2^-}$  af Ba-137, med  $Q^*$ -værdien 0,514 MeV. Vi antager desuden, at elektronen har farten 0 sådan at neutrinoen får hele

$Q^*$ -værdien som bevægelsesenergi (elektronen deler  $Q^*$ -værdien med neutrinoen). Vi antager ligeledes, at neutrinoens masse er forsvindende lille.

Neutrinoens bevægelsesmængde  $p$  kan så beregnes af ligningen

$$E^2 = p^2 \cdot c^2 + m^2 \cdot c^4 \quad \text{energi } E, \text{ bevægelsesmængde } p \text{ og masse } m$$

Og vi får:

$$p = \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - m^2 \cdot c^2} = \sqrt{\frac{(0,514 \text{ MeV})^2}{c^2} - 0^2} = \frac{0,514 \text{ MeV}}{c}$$

Vi antager, at neutrinoen skydes afsted i afstanden  $b$  fra kernecentrum, vinkelret på denne 'arm'.

Betegner vi bane-bevægelsesmomentet med  $L$ , har vi sammenhængen (klassisk!)

$$L = b \cdot p$$

Hvoraf

$$b = \frac{L}{p} = \frac{1\hbar}{0,514 \text{ MeV}/c} = \frac{1\hbar c}{0,514 \text{ MeV}} = \frac{197,327 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{0,514 \text{ MeV}} = 384 \text{ fm}$$

hvor vi har sat bane-bevægelsesmomentet  $L$  til  $1\hbar$ , og har benyttet  $\hbar \cdot c = 197,327 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$ . (Benyttelse af SI-enheder ville være tungt her)

Altså befinder  $(e^-, \bar{\nu}_e)$ -parret sig i afstanden 384 fm fra kernecentrum når det opstår, 'milevidt' fra kernen. Overlappet mellem  $(e^-, \bar{\nu}_e)$ -bølgefunktionen og neutronbølgefunktionerne i kernen er derfor meget lille med en kernestørrelse på 6,4 fm. Og derfor er beta-henfalds-sandsynligheden tilsvarende lille med et bane-bevægelsesmoment  $L = 1\hbar$  for  $(e^-, \bar{\nu}_e)$ -parret.

Det bemærkes, at bane-bevægelsesmoment  $L = 1\hbar$  kvantemekanisk beskrives med kuglefunktionerne  $Y_{1,m}$ , hvor  $m = -1, 0, 1$ . Og at denne vil implicere et paritetsskift mellem begyndelsestilstand og sluttetilstand for kernen, da  $Y_{1,m}$  skifter fortegn ved en rumspejling.

Denne klassiske beregning skal bruges til at sandsynliggøre, at betaminushenfald med bane-bevægelsesmængdemomentet på  $1\hbar$  - eller mere - vil være 'forbudte' - altså meget lidt sandsynlige, sammenlignet med beta-minus henfald med bane-bevægelsesmomentet  $L = 0\hbar$

(‘head on’). Og i stigende grad usandsynlige med voksende værdier af  $L$ . Derfor betegnes  $L$  som graden af ‘forbudthed’.

De konkrete beta-minus-henfald fra Cs-137 til Ba-137

$$g_{7/2} \rightarrow h_{11/2} : 94,7\%$$

Overgangen fra  $g_{7/2+}$  tilstanden i Cs-137 til den exciterede tilstand  $h_{11/2-}$  i Ba-137 er en  $L = 1$  overgang hvor elektron og neutrino tilsammen kobler til spinnet 1. Og da spinnene fra  $(e^-, \bar{\nu}_e)$ -parret her er ensrettet med bane-bevægelsesmomentet, giver det tilsammen spinforskellen 2 på de to kernetilstande,  $\frac{11}{2} - \frac{7}{2} = 2$ . Samtidig er der netop sket et paritetsskift i henfaldet, i overensstemmelse med  $L = 1$ .

$$g_{7/2} \rightarrow s_{1/2} : 0,0006\%$$

Overgangen fra  $g_{7/2+}$  tilstanden i Cs-137 til den exciterede tilstand  $s_{1/2+}$  i Ba-137 tilstanden er en  $L = 2$  overgang hvor elektron og neutrino tilsammen har spin  $S = 1$  og kobles tilsammen til 3 – forskellen på kernetilstandenes spinværdier. Igen en såkaldt forbudt overgang, der er undertrykt i forhold til andre  $L = 2$  overgange på grund af ensretningen af spin og bane-bevægelsesmoment for  $(e^-, \bar{\nu}_e)$ -parret. Men også langt mindre sandsynlig end overgangen til  $h_{11/2-}$  tilstanden med ‘forbudthedsgraden’ 1

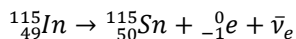
$$g_{7/2} \rightarrow d_{3/2} : 5,3\%$$

Overgangen fra  $g_{7/2+}$  tilstanden i Cs-137 til grundtilstanden  $d_{3/2+}$  i Ba-137 er en forbudt overgang med  $L = 2$ . Samtidig er også spinforskellen på de to kernetilstande  $\frac{7}{2} - \frac{3}{2} = 2$ . Her er det samlede spin  $S$  for  $(e^-, \bar{\nu}_e)$ -parret ikke ensrettet med spin og bane-bevægelsesmoment for  $(e^-, \bar{\nu}_e)$ -parret i denne overgang, hvilket på grund af faserumsforskelle (flere mulige sluttetilstande for  $(e^-, \bar{\nu}_e)$ -parret) gør den mere sandsynlig end overgangen til  $s_{1/2}$ -tilstanden.

Ifølge beskrivelsen ovenfor skulle overgangen til  $h_{11/2}$  tilstanden være den mest sandsynlige, efterfulgt af overgangen til grundtilstanden  $d_{3/2}$ , og med overgangen til grundtilstanden  $s_{1/2}$  som den mindst sandsynlige. Som jo også henfaldsraterne på figur 3 viser.

## Andet eksempel på forbudt henfald: fra In-115 til Sn-115

Processen er



$Q$ -værdien for processen er 0,49749 MeV.

In-115 er i grundtilstanden i en  $g_{9/2+}$  (proton) tilstand, og Sn-115 er i grundtilstanden i en  $s_{1/2+}$  (neutron) tilstand. Spinforskellen er her på hele 4 enheder, og klassificeres som en forbudt overgang

med  $L = 4$ . Denne høje grad af 'forbudthed' giver en meget lang halveringstid, nemlig  $4,41 \cdot 10^{14}$  år – som er ca. 32000 gange mere end Universets nuværende alder(!)

Når vi nu er i gang med lange halveringstider, så må vi nævne Bi-209. Denne er alfa-aktiv med halveringstiden  $2,0 \cdot 10^{19}$  år, eller ca. 1,5 milliarder gange Universets nuværende alder. Har du 1 g Bi-209, vil der være ca. 100 alfa-henfald pr. år. Men det er jo en helt anden sag. Ref. 9.

Tabel 2: forskellige overgangstyper af beta-minus henfald

Overgangstype	Grad af forbudthed, L	Forskel i kernespin $\Delta j$	Paritets- skift
Tilladt, supertilladt	0	$0, \pm 1$	nej
Forbudt, entydig*	1	$\pm 2$	ja
$L > 0$	2	$\pm 3$	nej
Elektron- og neutrino-spin ensrettet med	3	$\pm 4$	ja
banebevægelsesmængde- moment	4	$\pm 5$	nej
	...	...	...
Forbudt	1	$0, \pm 1$	ja
$L > 0$	2	$\pm 1, \pm 2$	nej
	3	$\pm 2, \pm 3$	ja
	4	$\pm 3, \pm 4$	nej
	...	...	...

\*: der er i det væsentlige kun involveret et kerne-matrixelement



Ref.1: tilladte og forbudte beta-henfald i astrofysikken – konsekvenser for stjerners slutfaser

<https://aktueltnaturvidenskab.dk/find-artikel/nyeste-numre/4-2020/stjerner-ensluttelse/>

Ref.2: A Forbidden Transition Allowed for Stars

<https://physics.aps.org/articles/v12/151>

Ref.3: 2 gamma-henfald [https://www.eli-np.ro/science\\_article.php?id=4](https://www.eli-np.ro/science_article.php?id=4)

Ref.4: Elektromagnetiske overgangsrater

<http://oregonstate.edu/instruct/ch374/ch418518/CHAPTER%209%20GAMMA%20RAY%20DECAY-rev.pdf>

Ref.5: Udvalgsregler for beta-minus henfald mm

<http://www.umich.edu/~ners311/CourseLibrary/bookchapter15.pdf>

Ref.6: <https://www.scribd.com/presentation/397693881/Bucharest-Kondev-Logft>

Ref.7: ikke-SI-enheder [https://physics.nist.gov/cuu/pdf/nonsi\\_2006.pdf](https://physics.nist.gov/cuu/pdf/nonsi_2006.pdf)

Ref.8: Skalmodellen for atomkerner [http://ne.phys.kyushu-u.ac.jp/seminar/MicroWorld3\\_E/3Part2\\_E/3P26\\_E/shell\\_model\\_E.htm](http://ne.phys.kyushu-u.ac.jp/seminar/MicroWorld3_E/3Part2_E/3P26_E/shell_model_E.htm)

Ref.9:

[https://epj.epj.org/articles/epja/abs/2019/08/10050\\_2019\\_Article\\_12823/10050\\_2019\\_Article\\_12823.html](https://epj.epj.org/articles/epja/abs/2019/08/10050_2019_Article_12823/10050_2019_Article_12823.html)