

# Kosmologiske modeller

- kan en galakse bevæge sig hurtigere end lyset?
- hvor gammelt er Universet, og hvor stort er det?
- hvornår vandt den mørke energi over stoffet?

Af Børge L. Nielsen, Egedal Gymnasium og HF

## Koordinatsystemet

Det koordinatsystem, der ofte benyttes i kosmologien, tager udgangspunkt i iagttagers position, hvor iagttageren er i hvile i forhold til Hubbleflowet (i praksis: i hvile i forhold til den kosmologiske baggrundsstråling – sådan at iagttageren ser samme temperatur for strålingen i alle retninger, uden dipolbidrag). Den radiale afstand fra iagttageren til fx en galakse til tidspunktet  $t$  betegner vi her med  $s(t)$ . Men der er mange forskellige afstandsbegreber i et ekspanderende univers – ligesom der er forskellige tidsbegreber. Hvad er det mere præcist for et afstandsbegreb og tidsdefinition vi almindeligvis bruger?

### Afstande

Vi bruger egenafstanden  $s(t)$  mellem iagttageren og det betragtede objekt. Altså (på et givet tidspunkt  $t$  – se nedenfor) summen af hvileafstande mellem 'tætliggende' galakser/iagttagere i retningen mod det betragtede objekt, og som alle følger Hubbleflowet (se nedenfor). Uanset at de fjerne galakser bevæger sig hurtigt bort fra os, er afstandene mellem dem ikke (Lorentz-) forkortede i denne afstandsbegrebsdefinition.

Bevægelser på tværs af den radiale koordinat vil involvere en vinkeldel, der samtidig beskriver rummets eventuelle krumning – det er relevant fx for vinkeldiameter-afstanden eller luminositetsafstanden, som vi dog ikke behandler her. Disse forskellige afstande kan på enkel måde udtrykkes ved egenafstanden og skalafaktoren  $R(t)$ .

### Tid

Vi bruger egentiden  $t$  fra Big Bang og frem for en kosmologisk iagttagere, der er i hvile i forhold til Hubbleflowet, eller anderledes udtrykt: tiden målt på et ur i hvile i forhold til en galakse, der uden særhastighed følger Universets udvidelse. Det betegnes ofte den kosmologiske (egen-)tid.

Hvis vi betegner den nuværende radiale afstand til et objekt i Universet med  $s_0$ , kan tidsudviklingen af afstanden/positionen for objektet beskrives ved ligningen

$$(1) \quad s(t) = R(t) \cdot s_0 \quad \text{Tidsudvikling af afstande til objekter, der følger Hubbleflowet}$$

hvor  $R(t)$  er en fælles skalafaktor for alle afstande i Universet.

For alle objekter, der følger udvidelsen uden særbevægelse vil  $s_0$  være konstant, og hele tidsudviklingen af afstanden til objektet er beskrevet ved skalafaktoren  $R(t)$ , der er den samme funktion af tiden for alle disse objekter.

Det betyder ikke, at galakserne, der følger Hubbleflowet, ikke bevæger sig i forhold til iagttageren – men alene at hele tidsafhængigheden for (egen-)afstanden er indeholdt i skalafaktoren  $R(t)$ .

Afstanden  $s_0$  betegnes ofte som medfølger-afstanden, hvor man tildeler fx en galakse, der følger Hubbleflowet en fast koordinat  $s_0$ . Den 'rigtige' (egen-)afstand til os til tiden  $t$  er så givet ved formel (1).

Det følger af formel (1), at skalafaktorens nuværende værdi (til tiden  $t_0$ ) er 1, altså  $R(t_0) = 1$ .

Skalafaktoren  $R(t)$  styres af den kosmologiske differentiaalligning, se nedenfor. Det er dermed de kosmiske gravitationsfelter, der styrer udviklingen i egen-afstanden  $s(t)$ .

Der er flere konsekvenser af formelen (1). Vi begynder med Hubbles lov.

Hvis vi ser på en galakse/iagttagere, der følger Hubbleflowet, vil koordinaten (medfølgerafstanden)  $s_0$  være konstant, derfor bliver galaksens radiale hastighed

$$(2) \quad v(t) = s'(t) = R'(t) \cdot s_0$$

Allerede her ser vi, at den radiale hastighed er proportional med den nuværende egenafstand.

Vi omformer formel (2) på følgende måde:

Først definerer vi Hubble-parameteren  $H(t)$  til tidspunktet  $t$

$$(3) \quad H(t) = \frac{R'(t)}{R(t)} \quad \text{Hubbleparameter til tiden } t$$

Hubbleparameteren er altså Universets udvidelses-rate på et givet tidspunkt.

Indfører vi definitionen af Hubbleparameteren i formel (2) får vi:

$$v(t) = s'(t) = R'(t) \cdot s_0 = \frac{R'(t)}{R(t)} \cdot R(t) \cdot s_0 = H(t) \cdot s(t)$$

hvor vi også har benyttet formel (1).

Hermed er vist, at en konsekvens af formel (1) er, at Hubbles lov gælder til alle tider:

$$(4) \quad v(t) = H(t) \cdot s(t) \quad \text{Hubbles lov, tidspunkt } t$$

Forskellige galakser radiale hastighed er på ethvert tidspunkt proportional med (egen-)afstanden til galaksen – for galakser, der følger Hubbleflowet.

På nuværende tidspunkt (tiden  $t_0$ ) gælder så

$$(5) \quad v(t_0) = H(t_0) \cdot s_0 \quad \text{Hubbles lov, tidspunkt } t_0 \text{ (nu)}$$

Hubbleparameterens nuværende værdi  $H_0$  er  $0,0692/\text{Gyr}$  eller  $6,92\%$  pr. Gyr ( $1 \text{ Gyr} = 10^9 \text{ år}$ ).

Det bemærkes, at galaksehastigheden  $v(t)$  (eller  $v(t_0)$ ) er summen af lokale hastighedsforskelle mellem en stribe galakser/iagttagere (der følger Hubbleflowet) placeret på vejen fra os til den fjerne galakse. Dette følger igen af, at (egen-)afstanden  $s(t)$  er summen af lokalt definerede (egen-)afstande mellem galakser placeret som nævnt ovenfor. Af samme grund er der ikke en øvre grænse for hastigheden, der egentlig ikke er en (enkelt) hastighed, med en sum af lokalt definerede hastighedsforskelle.

### Lysets radiale bevægelse

Langt det meste af den information, vi modtager fra kosmologiske afstande, får vi fra lys (eller mere generelt EM stråling). Derfor er det af interesse, hvordan lys bevæger sig i det ekspanderende univers.

Hvis et objekt ikke følger Hubbleflowet, men også har en særbevægelse, vil den radiale hastighed af objektet – udover Hubblebidraget (4) – have et lokalt bidrag  $v_{\text{lokal}}(t)$ , sådan at objektets hastighed i forhold til os bliver (formlen er en følge af (1))

$$s'(t) = H(t) \cdot s(t) + v_{\text{lokal}}(t)$$

For lys er  $v_{\text{lokal}} = \pm c$ , derfor bliver lysets radiale hastighed

$$(6) \quad s'(t) = H(t) \cdot s(t) \pm c \quad \text{Lysets radiale hastighed, tidspunktet } t$$

Her er konstanten  $c$  ca. 300.000 km/s.

Kalder vi medfølgerrhastigheden  $v_{\text{Hubble}} = H(t) \cdot s(t)$ , er formelen for lysets radiale hastighed

$$v_{\text{lys}} = v_{\text{Hubble}} \pm c$$

Vi kan nu besvare spørgsmålet:

### Kan en galakse bevæge sig hurtigere end lyset?

Det er i et uendeligt stort univers naturligt at stille spørgsmålet: kan en galakse bevæge sig hurtigere end lyset? Ser man nemlig på Hubbles lov (4) eller (5), ser vi, at en galakses radiale hastighed er proportional med vores afstand til den. Og da denne afstand i et kritisk eller underkritisk univers (se senere) er uden begrænsning, er der ikke nogen øvre grænse for galaksens hastighed. Men er det hurtigere end lyset?

Svaret er i første omgang nej. Her er Milne-modellen omtalt nedenfor særlig illustrativ, se senere.

Vi ser på formel (6) for lysets hastighed:

$$s'(t) = v_{\text{Hubble}} \pm c$$

Er Hubblehastigheden  $v_{\text{Hubble}} = H(t) \cdot s(t)$  fx  $10c$  for passende stor afstand, vil lysets fart i forhold til iagttageren være enten  $11c$  eller  $9c$ .

Altså bevæger galaksen sig ikke hurtigere end lyset fra galaksen ( $11c$ )!

At lyset kan bevæge sig med hastigheden  $11c$  og ikke er begrænset til hastigheden  $c$ , skyldes alene valget af den radiale afstands-definition (egen-afstanden til objektet).

Men man kan stille sig selv det spørgsmål, om dette lys nogensinde vil kunne ses af os – iagttageren – når selv hastigheden for fotonerne udsendt 'i vores retning' fjerner sig fra os med hastigheder over værdien  $c$ . Og svaret er, at hvis Hubblehastigheden på fotonens sted på et tidspunkt ikke kommer ned under hastigheden  $c$ , vil lyset aldrig nå os/iagttageren. Så i denne forstand kan en galakse godt bevæge sig så hurtigt bort fra os, at vi aldrig vil modtage lys fra den. Om dette er muligt afhænger dog af den kosmologiske model. En detaljeret beregning kræver kendskab til skalafaktorfunktionen  $R(t)$ , se nedenfor. Dette giver anledning til begreber som horisonter i Universet. Altså områder i rum og tid, hvorfra vi aldrig vil kunne modtage lys/EM stråling. Og/eller områder, der aldrig vil kunne modtage lys/EM stråling fra os. Den pt. bedste kosmologiske model indeholder begge typer (fortids- og fremtids-) horisonter.

### Milne-kosmologi - meget kort

Men hvorfor kan lyset bevæge sig hurtigere end værdien  $c$ ? Svaret er naturligvis koordinatsystemet!

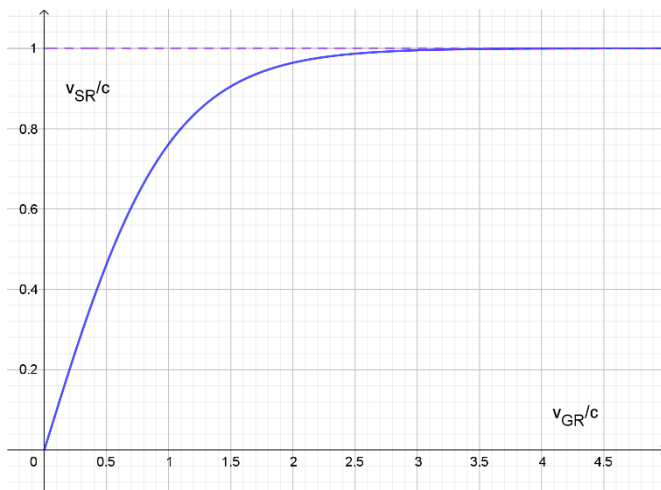
Der findes en kosmologisk model, hvor vi både kan vælge det ovenfor nævnte koordinatsystem (kaldet GR-systemet) og et koordinatsystem, der er defineret som i den specielle relativitetsteori (kaldet SR), nemlig det tomme univers! Modellen kaldes *Milne-modellen*. Galaksernes hastighed er i denne model konstante, fordi der ikke er hverken stof eller mørk energi til at bremse/accelerere dem. Ordet galakse burde måske erstattes af 'papir-galakse': universet indeholder jo ikke noget stof. Ikke desto mindre er modellen ganske illustrativ når det gælder om at belyse forskellen på koordinatsystemer i SR og GR.

Oversættelsen af galakse-hastigheder mellem de to koordinatsystemer er givet ved formelen

$$(7) \quad v_{SR} = c \cdot \tanh(v_{GR}/c)$$

hvor  $v_{GR} = H_0 \cdot s_0$  er radialhastigheden i det uendelige univers beskrevet ved egenafstande  $s_0$  og galakse-egentid og de tilsvarende afstande og tider beskrevet ved SR. Se figur 1 nedenfor.

Lysets hastighed i SR-koordinater er naturligvis  $\pm c$  overalt i koordinatsystemet.



Det fremgår af (7), at 'galakse'-hastigheden  $v_{SR}$  nærmer sig hastigheden  $c$ , når  $v_{GR}/c$  går mod uendelig, idet  $\tanh(x) = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x}) \rightarrow 1$  når  $x \rightarrow \infty$ . De fjerneste galakser i det uendelige rum i GR bevæger sig uendeligt hurtigt bort fra iagttageren, mens de – beskrevet i det endelige rum i SR-koordinat-systemet - bevæger sig med hastigheden  $c$ .

Valget af koordinatsystem er derfor (naturligvis) afgørende for beskrivelsen af bevægelser, herunder lysets bevægelse.

Figur 1: Galaxie-hastigheder i GR og SR - her  $v_{SR}$  som funktion af  $v_{GR}$

Er fx  $v_{GR} = 2c$ , vil efter formel (7) galaksens hastighed i SR-systemet være  $v_{SR} = 0,96 c$ . Ergo bevæger galaksen sig ikke hurtigere end lyset! Lysets hastighed i GR-koordinater vil efter formel (6) være  $v_{GR} = 2c \pm c$ , altså  $3c$  hhv  $1c$ . Lysets egenafstand til os (iagttageren i nulpunktet) vil altså vokse uanset hvilken vej lyset udsendes – mod os eller bort fra os. Dette er udelukkende en konsekvens af det valgte koordinatsystem. Vælger vi i stedet SR-koordinater, er lysets hastighed hhv.  $v_{SR} = \pm c$ . I Milne-universet er der ingen horisonter. Afstande mellem 'galakser', der bevæger sig hurtigt bort fra os, er i SR-koordinater Lorentz-forkortede, sådan at de fjernere 'galakser' ligger tæt i SR-koordinater – selv om de i GR-koordinater har samme indbyrdes afstand.

Rødforskydningen af lyset fra galakserne i SR-koordinater er en Dopplerforskydning givet ved formelen

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \sqrt{\frac{1+v_{SR}/c}{1-v_{SR}/c}} \quad \text{rødforskydning i SR-koordinater}$$

Det kan nemt vises – ved hjælp af formel (7) ovenfor og formel (8) nedenfor med  $R(t) = H_0 \cdot t$  – at denne formel netop fører til den velkendte rødforskydnings-formel i GR, formel (18). Faktisk giver formel (8) at  $s_0 = c/H_0 \cdot \ln(R(t_0)/R(t_e))$  hvor  $R(t_e)$  er skalafaktorens værdi på emissionstidspunktet. Indsat i formel (7) og SR-formlen for rødforskydning ovenfor får vi så

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{R(t_0)}{R(t_e)}$$

rødforskydning i GR-kordinater

I Milne-tilfælde kan den kosmologiske rødforskydning altså opfattes som *en enkelt* Dopplerforskydning uanset størrelsen af  $z$ . Dette er dog specielt for Milne-modellen. Hvis Universet indeholder stof/energi, kan Universet kun lokalt 'dækkes' af et SR-kordinatsystem (Minkowski-system) i hvile i forhold til Hubbleflowet. Det lokale SR-system skal være så lille, at universelle gravitationskræfter ikke spiller nogen rolle. Fx max udstrækning på 10% af Hubbleafstanden, se senere. At det altid er muligt at vælge et sådant system er sikret af ækvivalens-princippet i GR. Derved kan rødforskydningen opfattes som en løbende Dopplerforskydning under fotonens lange vej fra kilde til iagttager.

De to formler for rødforskydningen nævnt ovenfor er altså begge gyldige – men i hvert deres kordinatsystem (SR eller GR).

### Lysets bevægelse, egenafstand og nuværende egenafstand

Bevægelsesligningerne (6) har de to løsninger med tiden  $t_0$  som den ene grænse:

$$(8) \quad \text{Minus-løsning (fortid):} \quad s(t) = R(t) \cdot \int_t^{t_0} \frac{c \cdot dt}{R(t)} \quad \text{og} \quad s_0 = \int_t^{t_0} \frac{c \cdot dt}{R(t)}$$

$$(9) \quad \text{Plus-løsning (fremtid):} \quad s(t) = R(t) \cdot \int_{t_0}^t \frac{c \cdot dt}{R(t)} \quad \text{og} \quad s_0 = \int_{t_0}^t \frac{c \cdot dt}{R(t)}$$

Her har vi udnyttet sammenhængen (1) for at opstille formelen for egenafstanden  $s_0$ .

Formel (8) giver egenafstanden  $s(t)$  (og medfølgerafstanden  $s_0$ ) ud til den galakse, hvis lys vi modtager nu (kl.  $t_0$ ), udsendt kl.  $t$ .

Formel (9) giver egenafstanden  $s(t)$  (og medfølgerafstanden  $s_0$ ) ud til den galakse, der modtager lys kl.  $t$ , udsendt nu (kl.  $t_0$ ).

Begge formler frem/tilbageskriver afstanden  $c \cdot dt$  tilbagelagt af lysstrålen i fortiden/fremtiden til den tilsvarende nuværende afstand via formel (1),  $ds_0 = c \cdot dt/R(t)$ .

For at beregne disse positioner/afstande, kræves kendskab til skalafaktoren  $R(t)$ . Det ser vi på i det næste afsnit.

### Den kosmologiske differentiaalligning – bestemmelse af skalafaktoren $R(t)$

Udviklingen i skalafaktoren – og dermed afstanden til fjerne galakser – er naturligvis styret af de kræfter der virker på de store afstande i Universet. I denne sammenhæng vil vi her kun se på to styrende kræfter; nemlig den opbremsende gravitationskraft fra stoffet (uanset om det er lysende eller mørkt!) og den frastødende kraft fra den mørke energi.

Den kosmologiske differentiaalligning udtrykkes mest enkelt ved at vi måler kosmologiske masse/energitætheder i enheder af den kritiske massetæthed

$$\rho_{\text{crit}} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

Kritisk massetæthed

hvor  $H_0$  er (den nuværende) værdi af Hubblekonstanten, og  $G$  er den newtonske gravitationskonstant.

Vi indfører betegnelserne

$$\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_{\text{crit}}} \quad \text{Parameter for masse-tæthed af stof}$$

og

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2} \quad \text{Parameter for tæthed af mørk energi}$$

Her er  $\Lambda$  den såkaldte kosmologiske konstant, der beskriver energi-tætheden i tomt (stoffrit) rum.

Det bemærkes, at stof-parameteren  $\Omega_m$  er en sum af en baryon-tæthedsparameter  $\Omega_B = 0,0490$  (H og He i det tidlige Univers) og  $\Omega_C = 0,2607$  som er tæthedsparameter for koldt mørkt stof. Se ref. 1.

Den kosmologiske differentiaalligning bliver herefter

$$(1) \quad H_0^{-2} \cdot R''(t) = -0,5 \frac{\Omega_m}{R(t)^2} + \Omega_\Lambda \cdot R(t) \quad \text{Den kosmologiske differentiaalligning}$$

hvor  $t$  er tiden.

Her er ikke medtaget bidrag fra elektromagnetisk strålingsenergi, der spiller en rolle i de allertidligste faser af Universets udvikling. Og heller ikke fx et bidrag fra neutrinoer mm.

Leddene  $-0,5 \frac{\Omega_m}{R(t)^2}$  er det negative 'Newtonske' gravitationsbidrag, der bremser galaksernes relative bevægelse, mens leddet  $\Omega_\Lambda \cdot R(t)$  beskriver et positivt accelerationsbidrag til galaksernes bevægelse (såfremt  $\Omega_\Lambda > 0$ ).

Begyndelsesbetingelserne for denne differentiaalligning er

$$(2) \quad R(t_0) = 1 \quad \text{og} \quad R'(t_0) = H_0 \quad \text{Begyndelsesbetingelser}$$

De 'naturlige' enheder i arbejdet med kosmologiske modeller og den kosmologiske differentiaalligning er

$$T_H = \frac{1}{H_0} \quad \text{Hubbletiden}$$

og

$$L_H = c \cdot T_H = \frac{c}{H_0} \quad \text{Hubblelængden}$$

Måler vi tiden i Hubbletider, forenkles differentiaalligningen til

$$R''(t) = -0,5 \frac{\Omega_m}{R(t)^2} + \Omega_\Lambda \cdot R(t) \quad \text{Den kosmologiske differentiaalligning}$$

med begyndelsesbetingelserne

$$R(t_0) = 1 \quad \text{og} \quad R'(t_0) = 1 \quad \text{Begyndelsesbetingelser}$$

Enheden for hastighed bliver med ovenstående tids- og længdeenhed  $L_H/T_H = c$

Bevægelsesligningen for fotonen bliver derfor

$$s'(t) = \pm 1 + \frac{R'(t)}{R(t)} \cdot s(t) \quad \text{hvor } s(t_0) = 0, \quad \text{og} \quad s'(t_0) = \pm 1$$

hvor fortegnet + vælges ved bevægelse væk, og fortegnet - vælges ved bevægelse imod os/iagttageren.

De to størrelser  $\Omega_m$  og  $\Omega_\Lambda$  bestemmer tilsammen rummets krumning – og dermed, om rummet er endeligt eller uendeligt i udstrækning. Mere præcist er

$$\Omega = \Omega_m + \Omega_\Lambda \quad \text{Samlet parameter for masse/energitæthed}$$

Denne størrelse bestemmer rummets krumning:

- a) Hvis  $\Omega = 1$ , er krumningen 0, og rummet er uendeligt
- b) Hvis  $\Omega > 1$ , er krumningen positiv, og rummet er endeligt (2 dimensional model: kugle)
- c) Hvis  $0 \leq \Omega < 1$ , er krumningen negativ, og rummet er uendeligt

De kosmologiske parametre er målt af fx Planck-satellitten, og de bedste værdier er (2018, bl.a. Planck-satellittens data):

$$(3) \quad H_0 = (67,66 \pm 0,42) \frac{\text{km}}{\text{s}} / \text{Mpc} = (20,74 \pm 0,13) \frac{\text{km}}{\text{s}} / \text{Mlyr} = (0,0692 \pm 0,0004) / \text{Gyr}$$

$$\Omega_m = 0,3111 \pm 0,0056$$

$$\Omega_\Lambda = 0,6889 \pm 0,0056$$

Med disse værdier er Universet tæt på den kritiske værdi  $\Omega = \Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$ , i overensstemmelse med hvad der forudsiges af de såkaldte inflationsteorier. Universet har altså ingen (eller næsten ingen) krumning. Se ref. 1.

Med værdien af Hubbleparameteren ovenfor bliver

$$T_H = \frac{1}{H_0} = 14,45 \text{ Gyr} \quad \text{Hubbletiden}$$

$$L_H = c \cdot T_H = \frac{c}{H_0} = 14,45 \text{ Glyr} \quad \text{Hubblelængden}$$

Den kritiske massetæthed bliver

$$\rho_{\text{crit}} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = \frac{3(2,192 \cdot 10^{-18} / \text{s})^2}{8\pi \cdot 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 / \text{kg} \cdot \text{s}^2} = 8,598 \cdot 10^{-27} \text{ kg} / \text{m}^3 \quad \text{Kritisk tæthed}$$

Omregner vi fx til H-atomer, er det (kun!) 5,1 H-atom pr. kubikmeter. Taler vi om rigtige nukleoner, skal vi i middel 'tømme' ca.  $4 \text{ m}^3$  for at finde en enkelt!

## Nogle eksakte løsninger

Det er i visse tilfælde muligt at løse den kosmologiske differentialligning ovenfor eksakt.

- a) En hel klasse af løsninger fås for det kritiske Univers, hvor  $\Omega = \Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$ :

Skalafaktoren er her givet ved formlen

$$(4) \quad R(t) = \left( \sqrt{\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda}} \cdot \sinh \left( \frac{3}{2} \cdot H_0 \cdot t \cdot \sqrt{\Omega_\Lambda} \right) \right)^{\frac{2}{3}} \quad \text{Skalafaktor, kritisk model}$$

Modellen kaldes ofte for Lambda CDM-modellen (CDM = Cold Dark Matter).

Ønsker man at beregne alderen på Universet med denne model, skal man løse ligningen  $R(t_0) = 1$ . Løsningen er

$$(5) \quad t_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{H_0} \cdot \frac{\ln\left(\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}} + \sqrt{1 + \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}}\right)}{\sqrt{\Omega_\Lambda}} \quad \text{Alder, kritisk univers}$$

God lille øvelse: vis denne formel! Indsættes de kosmologiske parametre fra sidste afsnit, får vi

$$t_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{H_0} \cdot \frac{\ln\left(\sqrt{\frac{0,6889}{0,3111}} + \sqrt{1 + \frac{0,6889}{0,3111}}\right)}{\sqrt{0,6889}} = 0,954 \cdot \frac{1}{H_0} = 0,954 \cdot 14,45 \text{ Gyr} = 13,79 \text{ Gyr}$$

som er det pt. bedste bud på alderen af Universet.

Man kunne i denne model stille spørgsmålet: hvornår får den mørke energis frastødende kraft overtaget over gravitationskræfterne?

Vi ser her på ligningen (10) for accelerationen i skalafaktoren  $R(t)$ . Vi sætter  $R''(t) = 0$  og finder

$$0 = -0,5 \frac{\Omega_m}{R(t)^2} + \Omega_\Lambda \cdot R(t) \quad \text{Kraftligevægt, mørk energi og gravitationskraft}$$

En lille omformning giver

$$R(t) = \sqrt[3]{0,5 \frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda}} = \sqrt[3]{0,5 \frac{0,3111}{0,6889}} = 0,6089$$

hvor vi har indsat de kosmologiske parametre fra (12). Løsningen af denne ligning – igen med de kosmologiske parametre indsat i (13) – er

$$t = 7,69 \text{ Gyr} \quad \text{Tiden hvorefter den mørke energi dominerer}$$

Dette skete altså allerede for  $13,79 \text{ Gyr} - 7,69 \text{ Gyr} = 6,1 \text{ Gyr}$  siden.

- b) En anden eksakt løsning kan findes, når  $\Omega_m = 1$  og  $\Omega_\Lambda = 0$  – altså et kritisk stofunivers uden mørk energi:

$$R(t) = \left(\frac{3}{2} \cdot H_0 \cdot t\right)^{\frac{2}{3}} \quad \text{Skalafaktor, kritisk stof-model}$$

Modellen kaldes Einstein de Sitter modellen.

Ønsker man at beregne alderen på Universet med denne model, skal man igen løse ligningen  $R(t_0) = 1$ . Løsningen er

$$t_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{H_0} \quad \text{Alder, kritisk stof-univers}$$

Denne alder kan nemt beregnes til 9,63 Gyr.

Begge resultater kan evt. fås som grænseværdier af den forrige model – men kan naturligvis, som den forrige model - også findes ved at løse den kosmologiske differentialligning.



- c) En tredje eksakt løsning kan findes, når  $\Omega_m = 0$  og  $\Omega_\Lambda = 1$  – altså et kritisk mørk energi-univers uden stof:

$$R(t) = e^{H_0 \cdot t} \qquad \text{Skalafaktor, kritisk mørk energi-model}$$

Denne model har intet Big Bang, da jo eksponentialfunktionen ikke bliver 0 på noget tidspunkt. Det er i øvrigt den eneste model med konstant Hubbleparameter,  $H(t) = H_0$ . Denne model kan også findes ved en interessant grænseovergang fra modellen (13).

## Kosmologiske afstandsformler og Universets størrelse

Vi benytter i dette afsnit afstandsformler a la (8) og (9).

Vi lægger ud med at beregne størrelsen af det synlige Univers pt., formel (8):

$$(15) \quad s_{0,max} = R(t_0) \cdot \int_0^{t_0} \frac{c \cdot dt}{R(t)} \qquad \text{Størrelse af det synlige Univers pt}$$

Vi erstatter skalafaktoren  $R(t)$  med udtrykket (13) og  $t_0$  med udtrykket (14):

$$(16) \quad s_{0,max} = 1 \cdot \int_0^{\frac{2}{3} H_0} \frac{\ln \left( \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m} + \sqrt{1 + \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}} \right)}{\sqrt{\Omega_\Lambda}} \frac{c \cdot dt}{\left( \frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda} \cdot \sinh \left( \frac{3}{2} H_0 \cdot t \cdot \sqrt{\Omega_\Lambda} \right) \right)^{\frac{2}{3}}}$$

De tre kosmologiske parametre  $H_0$ ,  $\Omega_m$  og  $\Omega_\Lambda$  hentes fra (12), og resultatet bliver

$$s_{0,max} = 47,0 \text{ Glyr} \qquad \text{Radius i synligt Univers, 7. juni 2020}$$

Dette er 3,4 gange større end den 'naive' værdi  $c \cdot t_0 = 13,79$  Glyr. Grunden er naturligvis, at afstanden til den emitterende galakse vokser i den tid, lyset er undervejs til os.

Det bemærkes, at der ikke er taget hensyn til en evt. inflation i det tidlige Univers! De 47 Glyr er størrelsen på det 'genopdagede' Univers efter inflationen.

## Kosmologisk tidsforlængelse

Den *kosmologiske tidsforlængelse* ses fx ved lyskurver fra supernovaer SN1a, der befinder sig på kosmologiske afstande. Her er det typiske tidsforløb for udviklingen i lysstyrke forlænget med faktoren  $1 + z$ , hvor  $z$  er rødforskydningen af spektrallinjerne i spektret.

Ligesom afstande (herunder bølgelængder) forlænges under den kosmologiske udvidelse, vil også varigheden af alle fysiske processer forøges når de ses på stor afstand. Man kunne sige, at 'filmen' fra det fjerne afspilles langsommere set i teleskopet, så varigheden forøges med faktoren  $1 + z$ . Er fx  $z = 9$ , vil alle fysiske processer ses i slowmotion, nemlig 10 gange langsommere end den oprindelige lokale proces.

Et andet eksempel er den kosmologiske baggrundsstråling, med  $z \approx 1100$ . Tidsudviklingen i denne stråling ten gået i stå, idet udviklingen sker ca. 1100 gange langsommere end for en iagttager 'derude' – hvis der da var nogen dengang!

En argumentation for den kosmologiske tidsforlængelse kunne se sådan ud:

Vi antager, at det lysemitterende objekt og den lysmodtagende galakse følger Hubbleflowet. Derfor vil medfølgereafstanden  $s_0$  være konstant, dvs.

$$s_0 = \int_{t_e}^{t_0} \frac{c \cdot dt}{R(t)} = \int_{t_e + \Delta t_e}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{c \cdot dt}{R(t)} \quad \text{medfølgereafstand for galakse}$$

Venstresidens integral er medfølgereafstanden mellem de to galakser, beskrevet ved bevægelsen af lys, der udsendes og modtages til tidspunktet hhv.  $t_e$  og  $t_0$ , og højresiden tilsvarende medfølgereafstanden, beskrevet ved bevægelsen af lyset, der udsendes og modtages lidt senere, nemlig på tidspunkterne hhv.  $t_e + \Delta t_e$  og  $t_0 + \Delta t_0$ .

Af ovenstående ligning følger (hvis  $\Delta t_e$  og  $\Delta t_0$  er korte tidsrum i kosmologisk sammenhæng):

$$\frac{c \cdot \Delta t_e}{R(t_e)} = \frac{c \cdot \Delta t_0}{R(t_0)}, \quad \text{hvoraf:} \quad \frac{\Delta t_e}{R(t_e)} = \frac{\Delta t_0}{R(t_0)}$$

Med sammenhængen  $1 + z = \frac{R(t_0)}{R(t_e)}$  findes så endelig

$$\Delta t_0 = \Delta t_e \cdot (1 + z) \quad \text{Kosmologisk tidsforlængelse}$$

som påstået. Det oprindelige tidsrum  $\Delta t_e$  målt ved emitter-objektet er forlænget med faktoren  $(1 + z)$  ved modtagelsen.

### Rødforskydning og Doppler-effekt

Rødforskydningen  $z$  er som bekendt defineret ved

$$1 + z = \frac{\lambda(t_0)}{\lambda(t_e)} \quad \text{Definition af rødforskydning } z$$

hvor  $\lambda(t_0)$  er den af os målte bølgelængde af en spektrallinje i spektret fra en galakse, og  $\lambda(t_e)$  er laboratorie-værdien af den tilsvarende spektrallinje, udsendt af emitter-galaksen.

Kan denne rødforskydning – uanset størrelse – forklares ved hjælp af den urelativistiske Doppler-formel? Svaret er – måske lidt overraskende for nogen – ja.

Vi begynder med at opskrive den urelativistiske Dopplerformel:

$$\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{v}{c} \quad \text{Urelativistisk Dopplerformel}$$

Her er  $\lambda_1$  bølgelængden af lys udsendt af en lyskilde i hvile,  $\lambda_2$  er bølgelængden af lyset modtaget af en iagttagere, der bevæger sig bort fra lyskilden med hastigheden  $v$ , hvor  $v \ll c$ .

Forklaringen på, at også store rødforskydninger kan opfattes som (en serie af) Dopplerforskydninger er som følger:

Emittergalaksen udsender – bedømt fra denne – lys af bølgelængden  $\lambda(t_e)$ . Dette lys passerer på den lange vej til os en række galakser/iagttagere, som vi her antager følger Hubbleflowet. Den nærmeste galakse bevæger sig bort fra emittergalaksen, hvorfor bølgelængden af lyset – set fra den nærmeste galakse – er forøget som følge af Dopplereffekten. Lyset fortsætter mod den næste galakse, der igen bevæger sig bort fra den forrige, hvorfor lyset rødforskydes yderligere osv. (modsat kunne argumenteres med, at emittergalaksen – set fra modtagergalaksen – bevæger sig bagud og derfor giver anledning til en rødforskydning, osv.).

Det bemærkes, at vi her arbejder med lokale inertialsystemer, i hvile i forhold til hver sin (nærtliggende) galakse/iagttagere, der følger Hubbleflowet.

Det er i den generelle relativitetsteori altid muligt at vælge et lokalt (frit faldende, ikke roterende) inertialsystem (Minkowski-system), hvor vi i et begrænset område i rum og tid kan bruge fysikkens love, fx Maxwells ligninger, uden reference til kosmiske gravitationskræfter, altså led der indeholder  $\Omega_m$  og  $\Omega_\Lambda$  (ækvivalensprincippet). Størrelsen af dette system skal være væsentlig mindre end Hubblelængden, som pt. er ca. 14 Glyr. I dette system er rødforskydningen en ikke-relativistisk Doppler-effekt der skyldes galaksernes bevægelse. Origo i dette ikke-ekspanderende system kan vælges som værende sammenfaldende med en observatør, der følger Hubble-udvidelsen med konstant medfølger-koordinat.

I større områder (i forhold til Hubblelængden) vil der optræde 2. ordens effekter i afstanden når bevægelser skal beskrives – et tegn på at kosmologiske gravitationskræfter ikke længere kan ignoreres.

Vi omformer Dopplerformlen ovenfor:

$$\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{v}{c} \qquad \text{som vi kort skriver:} \qquad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}$$

Hastigheden  $v$  indføres fra Hubbles lov:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} = \frac{H(t) \cdot s}{c} = H(t) \cdot \frac{s}{c} = H(t) \cdot \Delta t$$

Her er  $\Delta t = s/c$  tiden, lyset bruger for at bevæge sig fra den ene nærtliggende galakse til den næste.

Men vi husker jo, at  $H(t) = R'(t)/R(t)$ , derfor er

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = H(t) \cdot \Delta t = \frac{R'(t)}{R(t)} \cdot \Delta t = \frac{R'(t) \cdot \Delta t}{R(t)} = \frac{\Delta R}{R}$$

altså

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta R}{R}$$

Vi skifter nu til den differentielle udgave af denne ligning, og vi integrerer:

$$\int_{\lambda_e}^{\lambda_0} \frac{d\lambda}{\lambda} = \int_{R(t_e)}^{R(t_0)} \frac{dR}{R}$$

hvoraf

$$\ln\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_e}\right) = \ln\left(\frac{R(t_0)}{R(t_e)}\right)$$

Altså er

$$(18) \quad 1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{R(t_0)}{R(t_e)} \qquad \text{Rødforskydning: Doppler på Doppler på...}$$

Bølgelængden skalerer altså som skalafaktoren (og dermed som afstandene i Universet) når vi ser på den løbende Dopplerforskydning, der finder sted under lyset lange rejse til os.

Faktisk kan vi argumentere mere elementært for denne ligning (uden brug af Hubbles lov):

Vi tager igen udgangspunkt i ligningen for Dopplerforskydning som beskrevet ovenfor:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}$$

Vi forlænger højresiden med tiden  $\Delta t$ , som er tiden, lyset bruger for at rejse fra en galakse til den næste (nærtliggende) galakse, der fjerner sig med hastigheden  $v$ :

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v \cdot \Delta t}{c \cdot \Delta t}$$

Afstanden mellem galakserne er  $s = c \cdot \Delta t$ , og tilvæksten i afstanden er  $\Delta s = v \cdot \Delta t$ . Dermed har vi

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta s}{s}$$

Her ser vi, at den relative vækst i bølgelængden er lig med den relative vækst i afstanden. Dette fører til – ved et argument som ovenfor – at bølgelængden og galakseafstanden er proportionale, altså

$$1 + z = \frac{\lambda_o}{\lambda_e} = \frac{s(t_o)}{s(t_e)}$$

Men afstandsforholdet er lig med skalafaktorforholdet, se ligning (1). Dermed har vi igen (18). Se ref. 5.

I Milneuniverset hvor vi kan bruge både GR-kordinater og SR-kordinater i hele rumtiden er det klart, at selv den største rødforskydning kan forklares som *en enkelt* Dopplerforskydning. Som det jo er, når vi bruger SR-kordinater og som vi argumenterede for ved omtalen af Milnemodellen. Se ref. 7.

### Pædagogiske fordele ved Doppler-forklaringen

Som argumenteret ovenfor er der ikke brug for en særlig fysik, der kunne hedde 'rummet udvider sig' for at argumentere for formel (18) – vi kan bruge forklaringen med den velkendte Dopplerformel, dog med gentagne anvendelser som beskrevet ovenfor (faktisk en 'løbende' Dopplerforskydning hele vejen fra emittergalakse til observatør-galakse)

Vi kan derfor undgå formuleringer som: 'galakserne bevæger sig egentlig ikke – selv om afstandene til dem vokser, det er bare rummet mellem os og galaksen, der udvider sig'.

Godt nok har vi ovenfor indført et koordinatsystem med faste positioner for de galakser, der følger Hubbleflowet. Men grunden til at positionerne er faste er jo, at der er tale om medfølger-kordinater! Tidsafhængigheden for afstandene varetages af skalafaktoren  $R(t)$  – så galakserne bevæger sig faktisk, hvis vi bruger egenafstanden  $s(t)$  som afstandskoordinat. Og galakserne er i frit fald i det kosmiske gravitationsfelt.

Hvis du til betjenten, der med Doppler-laserpistolen har målt din hastighed til 120 km/h hvor du måtte køre 50 km/h, siger: "det er ikke min bil, der kørte for hurtigt, det var rummet mellem bilen og laseren, der udvidede sig for hurtigt. Min bil har nemlig en fast medfølgerposition som jeg har malet på siden, der står – som du kan se - 17 km", så vil betjenten nok give dig en ekstra bøde for forsøg på vildledning.

I den generelle relativitetsteori er det stoffet og stoffets bevægelse, der genererer gravitationsfelterne og dermed rumtidens geometri – og rumtidens geometri der styrer stoffets bevægelse. Rummet er ikke en selvstændig aktør, der 'trækker' galakserne med sig, som fx ballonmodellen kunne lægge op til. Beregninger viser, at galakser, der ikke følger Hubbleflowet, ikke bare 'retter ind' og følger med i udvidelsen. Galakserne bevæger sig i og styres af det kosmiske gravitationsfelt uanset om de følger Hubbleudvidelsen eller ej. Se ref. 8. Newton rules!

- " This (de nævnte eksempler) have proved that 'expanding space' is in general a dangerously flawed way of thinking about an expanding universe" - Peacock 2010

Det betyder ikke, at der er nogen uoverensstemmelse mellem Dopplerforklaringen og 'udvidelses'-forklaringen eftersom den sidstnævnte nærmest er opfundet for at 'forklare' rødforskydningsligningen (18) ovenfor. Men pædagogisk er det uheldigt at arbejde med bevægelser der så ikke er bevægelser alligevel. Og at indføre ny udvidelsesfysik, der ikke er nødvendig. Se ref. 3, 4, 7, 8, 10

Man får så også problemet med at forklare, at 'rumudvidelsen' og Dopplerformlen for små værdier af rødforskydningen giver samme resultat.

En yderligere fordel ved Dopplerforklaringen er, at spørgsmål som "hvorfør udvider Jorden sig ikke? Og hvad med atomerne? Solsystemet? Mælkevejen?" ikke naturligt dukker op som de gør med 'rummet udvider sig'-forklaringen. Ej heller fx spørgsmålet: har galakserne en kinetisk energi hvis de ikke bevæger sig?

Man ser også i flere fremstillinger en mellemting mellem de to beskrivelser: på kort afstand er der tale om en Dopplerforskydning (og dermed en fysisk bevægelse), men på større afstande er det rummet, der udvider sig (underforstået: her bevæger galakserne ikke, det er rummet mellem dem, der udvider sig).

Til denne beskrivelse kunne man jo stille spørgsmålet: ved hvilken rødforskydning tager 'rumudvidelsen' over?

En mere seriøs overvejelse opnår vi måske med *den kosmiske undersøgelsesrejsende*, der rejser ud for at spørge de lokale langs lysets vej til os, om det er der ude rummet har udvidet sig. Men får overalt svaret, at de ser udvidelsen som en Doppler-forskydning på 'korte' afstande, ligesom vi selv gør det. I øvrigt i overensstemmelse med det kosmologiske princip, at udvidelsen ser ens ud uanset hvor vi ser den fra. Hvis udvidelsen giver anledning til en Dopplerforskydning på korte afstande, er forklaringen også Dopplerforskydning på store afstande – vel at mærke forstået som 'Doppler på Doppler på...'

Ballonmodellen og 'hævende dej med rosiner'-modellen skal altså ikke forstås så bogstaveligt, at 'mediet' (ballonen eller dejen) trækker 'galakserne' med sig som en slags ny æter. I Universet er galakserne (eller måske snarere galaksehobene) i frit fald i det kosmiske gravitationsfelt, der styrer bevægelsen. Men modellerne kan godt bruges som illustration af udvidelsen, hvor der intet centrum er, illustration af Hubbles lov og hvor også bølgelængder øges i takt med udvidelsen, selv om hverken ballon-mediet eller dej-mediet giver forklaringen – men alene illustrationen – på denne forøgelse af bølgelængderne.

I relativitetsteorien er der aldrig kun et beskrivelsessystem, der kan hævdes at 'forklare' fysikken. Tværtimod kan anvendelsen af flere beskrivelsessystemer være nyttige til at kaste nyt/andet lys over fysikken og det er jo i øvrigt i den grad naturligt i relativitetsteoriene.

Ref. 1: <https://arxiv.org/abs/1807.06205>

Ref. 2: <https://www.mso.anu.edu.au/~charley/papers/LineweaverEganParisv2.pdf>

Ref. 3: [http://www.astro.ucla.edu/~wright/cosmology\\_faq.html](http://www.astro.ucla.edu/~wright/cosmology_faq.html)

Ref. 4: <http://math.ucr.edu/home/baez/physics/Relativity/GR/hubble.html>

Ref. 5: Steven Weinberg: De første tre minutter, kapitel 2, Gyldendal 1979

Ref. 6: <https://youtu.be/DCIEX00pCZ4> - Stephen Hawking om det expanderende Univers og Dopplereffekten

Ref. 7: <https://arxiv.org/pdf/0808.1081.pdf> - rødforskydning tolkes rent kinematisk

Ref. 8: <http://indico.ictp.it/event/a09159/session/2/contribution/1/material/0/0.pdf>

Summer School in Cosmology John Andrew Peacock 19 - 30 July 2010

Ref. 9: <http://www.jb.man.ac.uk/distance/frontiers/cosmology/node2.htm> - Cosmological expansion and redshift

Ref. 10: [https://www.nbi.ku.dk/spoerg\\_om\\_fysik/astrofysik/universetsudvidelse/](https://www.nbi.ku.dk/spoerg_om_fysik/astrofysik/universetsudvidelse/)

Ref. 11: Milne model [http://www.chronon.org/articles/milne\\_cosmology.html](http://www.chronon.org/articles/milne_cosmology.html)